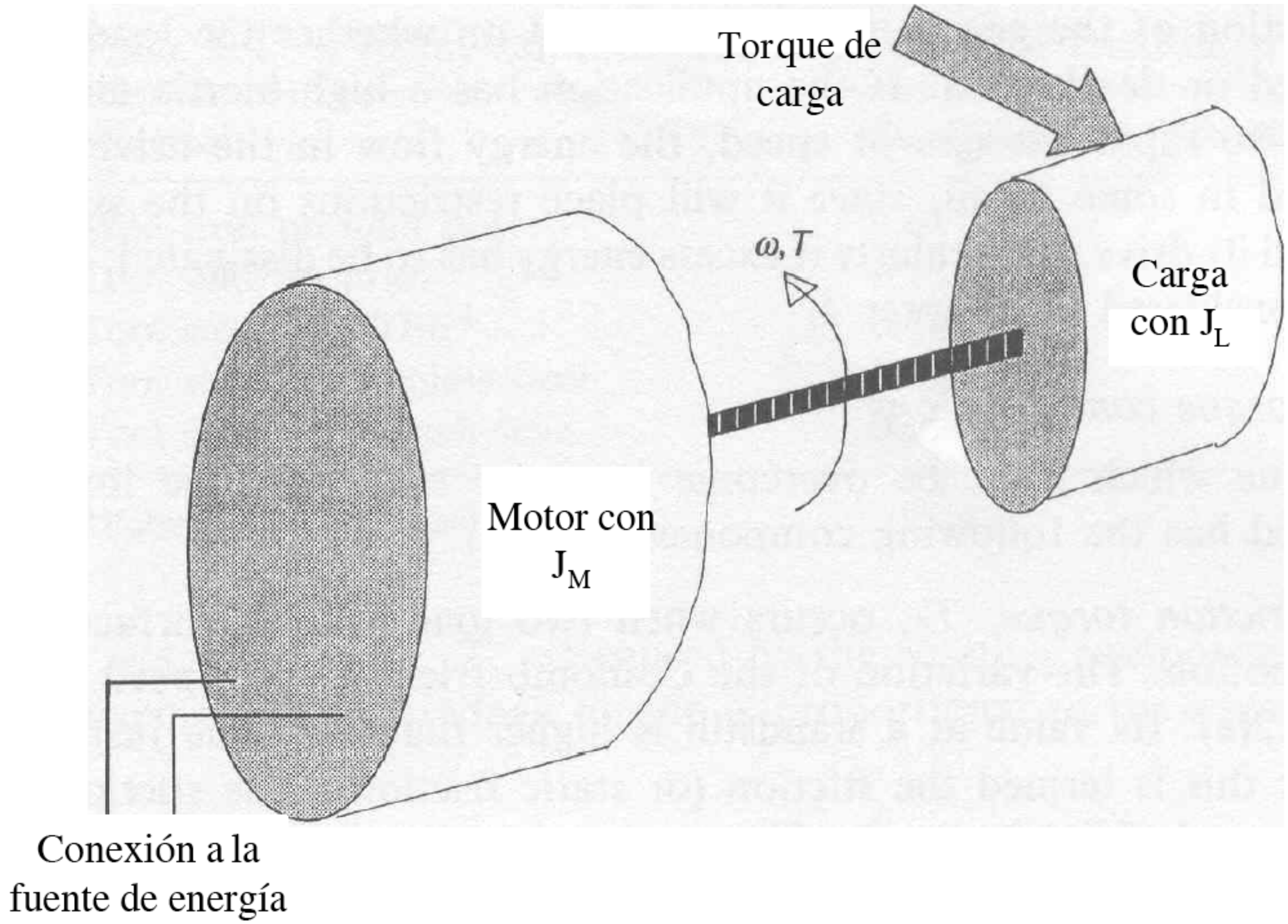


Acople con un eje entre un motor y una carga.

En todos los ejes de acople uno de los extremos del eje está conectado a una fuente de par, y el otro a una carga que recibe ese par; como en general el acople es reversible, durante el ciclo de operación el flujo de energía puede invertirse y los extremos del eje invertir sus papeles en el intercambio de par, pero eso no modifica el argumento que sigue.

La primera condición que evidentemente debe cumplir el eje es ser capaz de transmitir el par máximo de salida del extremo motor al extremo de carga sin sufrir una deformación inaceptable.

La capacidad de transmitir par se puede determinar con la "fórmula de torsión", que relaciona el par aplicado con las dimensiones del eje, su rigidez, y el ángulo de torsión (la deformación angular inevitable) entre el extremo donde se aplica el par motriz y el extremo donde se conecta la carga:

$$\frac{T}{I_o} = \frac{G\theta}{L} = \frac{\tau}{r}$$

Donde:

T es el par aplicado, G es el “módulo de corte” del material del eje, θ es el ángulo de torsión, L es la longitud del eje, tau es el “esfuerzo de corte”, r es el radio del eje, y I_o es un factor de escala definido como:

$$I_o = \frac{\pi r^4}{2}$$

Y la rigidez, K, del eje es:

$$K = \frac{T}{\theta} = \frac{G\pi r^4}{2L}$$

El radio del eje debe calcularse para cumplir con dos condiciones relativamente independientes:

a.- No romperse, esto es el stress de torsión no supere el valor de ruptura.

b.- Que el ángulo de torsión por unidad de longitud no supere el valor máximo fijado en el diseño.

El radio mínimo del eje que cumple con la primera condición, $r_{ruptura}$, es:

$$r_{ruptura} = \frac{\tau_{\max} I_o}{T} = \sqrt[3]{\frac{2T}{\pi \tau_{\max}}}$$

El radio mínimo del eje que cumple con la segunda condición, $r_{torsión}$, es:

El radio mínimo del eje que cumple con la segunda condición, $r_{torsión}$, es:

$$r_{torsión} = \sqrt[4]{\frac{2TL}{G\theta\pi}}$$

Como se deben cumplir ambas condiciones simultáneamente se debe seleccionar el mayor de los dos valores calculados.

Ejemplo:

Determinar el diámetro que debe tener un eje de acero para transmitir un par de 3000Nm sin exceder el esfuerzo de ruptura de 50MNm^{-1} ni una deflexión de 0,1rad/m; considere que el módulo de ruptura del material empleado es 80GNm^{-1}.

a) Cálculo del radio mínimo requerido para transmitir el par deseado:

$$r_{ruptura} = \sqrt[3]{\frac{2T}{\pi\tau_{\max}}} = \sqrt[3]{\frac{2 * 3000\,Nm}{\pi * 50 * 10^6 \,\frac{N}{m}}} = 33,7 * 10^{-3}\,m$$

b) Cálculo del radio mínimo requerido para limitar la deflexión del eje al valor deseado.

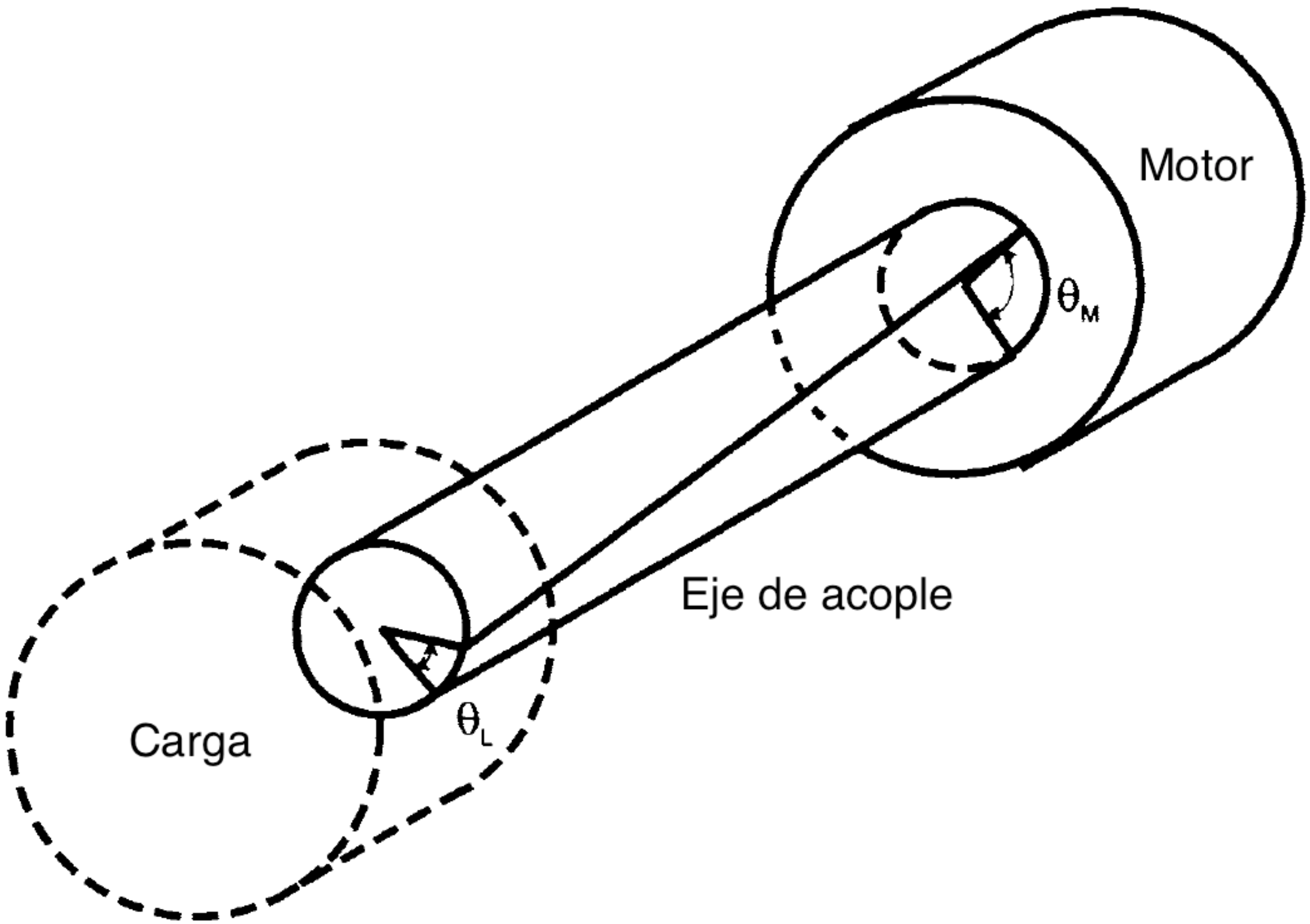
$$r_{torsión} = \sqrt[4]{\frac{2TL}{G\theta\pi}} = \sqrt[4]{\frac{2*3000\,Nm*1m}{80*10^{9}\,\frac{N}{m}\,0{,}1\frac{rad}{m}\,\pi}} = 22{,}1*10^{-3}m$$

Se debe seleccionar el mayor de los dos valores, luego el eje debe tener un radio de 33,7milímetros, de forma que sea capaz de transmitir el par requerido, adicionalmente la deflexión del eje será menor que la máxima especificada, lo cual no es un problema.

Oscilaciones en el eje.

Dado que las cargas rotacionales tienen siempre un componente inercial, y que los ejes no son infinitamente rígidos, el extremo de carga del eje va a reaccionar con retraso a los cambios de velocidad que se produzcan en el extremo del motor; si el sistema debe operar en un régimen en el cual las aceleraciones, frenazos y cambios de dirección son frecuentes, se van a generar oscilaciones mecánicas en las cuales el eje actuará como un resorte torsional.

En general, en respuesta a la aplicación de un escalón de par T_m el extremo motriz del eje se habrá movido un ángulo Θ_M, mientras que el extremo de carga estará en una posición Θ_L.


Motor
θ_M
Eje de acople
Carga
θ_L

En el extremo motriz del eje se tiene:

$$T_M = J_M s^2 \theta_M + Bs(\theta_M - \theta_L) + K(\theta_M - \theta_L)$$

,

Y en el extremo de la carga:

$$Bs(\theta_M - \theta_L) + K(\theta_M - \theta_L) = J_L s^2 \theta_L + T_L$$

Donde K es la rigidez del eje (en Nm/radianes) y B es el coeficiente de amortiguamiento por fricción (en Nm/radianes).

La frecuencia de resonancia no amortiguada es:

$$\omega_o = \sqrt{\frac{K}{J_M} + \frac{K}{J_L}}$$

O, redefiniendo:

$$\omega_o = \sqrt{1-\varsigma}$$

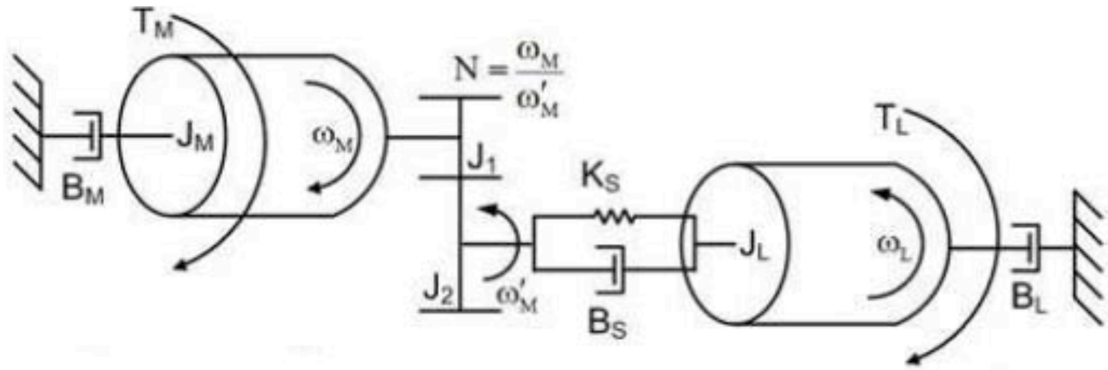
$$\varsigma^2 = \sqrt{\frac{B}{2\sqrt{K}}\left(\frac{1}{J_M} + \frac{1}{J_L}\right)}$$

Y la frecuencia de oscilación amortiguada es:

$$\omega_n = \sqrt{1 + \frac{B^2}{4K}\left(\frac{1}{J_M} + \frac{1}{J_L}\right)}$$

Donde K es la rigidez del eje (en Nm/radianes) y B es el coeficiente de amortiguamiento por fricción (en Nm/radianes).

El problema se complica si entre el motor y la carga se debe incluir un acople. Si se considera el caso mas sencillo del acople giro-giro a engranajes y se consideran las inercias rotacionales de las dos ruedas y un solo componente no totalmente rígido se tiene:



Donde, reflejando sobre el eje del motor, se tiene:

$$T_M = \left[J_M + J_1 + J_2 \left(\frac{1}{N} \right)^2 \right] \frac{d\omega_M}{dt} + B_M \omega_M +$$

$$+ B_s \left(\frac{1}{N} \right) \left(\frac{\omega_M}{N} - \omega_L \right) + K_s \left(\frac{1}{N} \right) \left(\frac{\Theta_M}{N} - \Theta_L \right)$$

$$J_L \frac{d\omega_L}{dt} + B_L \omega_L -$$

$$-B_S\left(\frac{\omega_M}{N} - \omega_L\right) - K_s\left(\frac{\Theta_M}{N} - \Theta_L\right) = -T_L$$

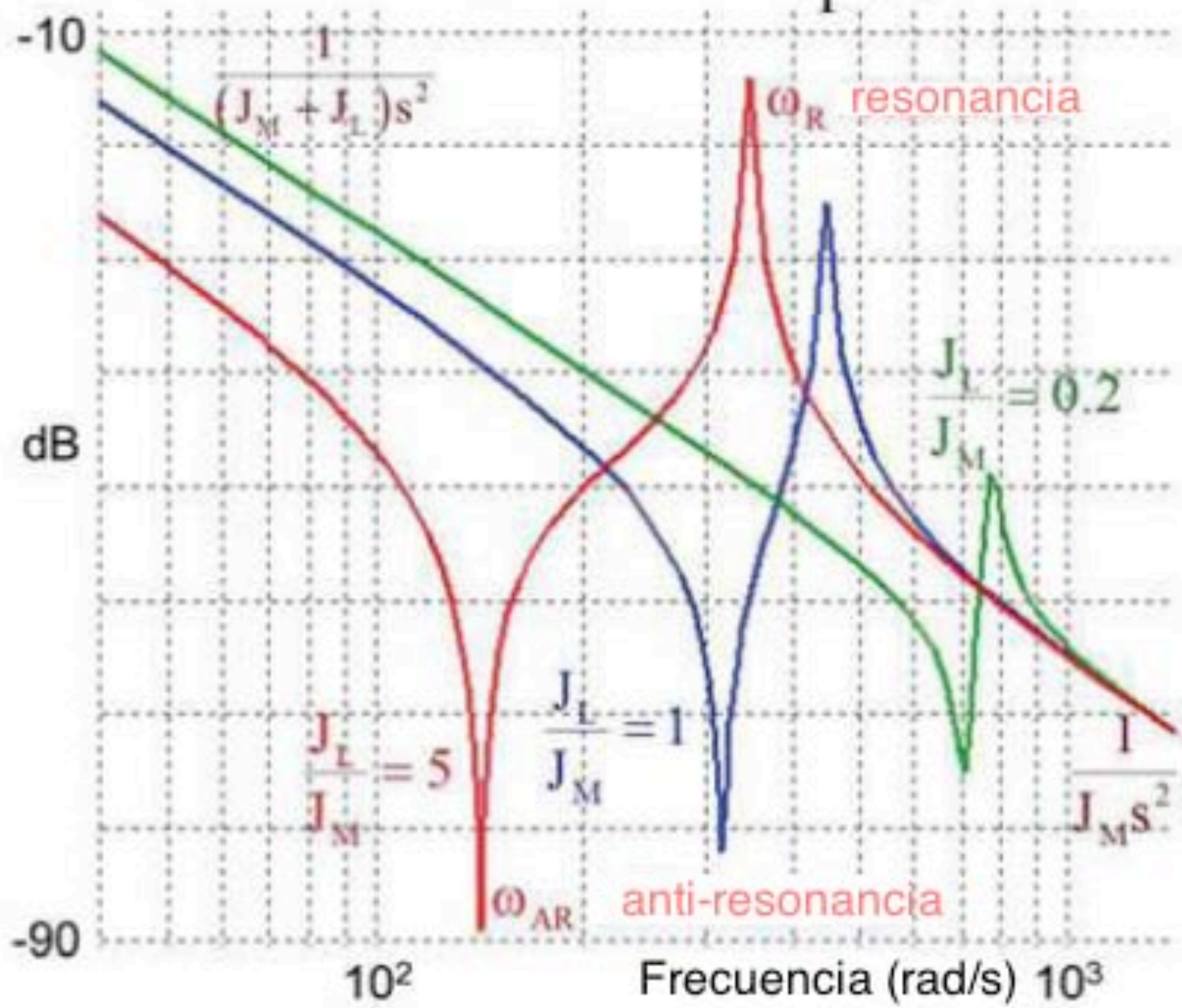
Si, para simplificar, se asume que N=1, y que las fricciones B_M y B_L son nulas, y se grafican los diagramas de Bode para diferentes relaciones de J_L/J_M, considerando los siguientes valores:

J_M = 0,002 kg-m2

K_S = 200 Nm/rad

B_S = 0,01 Nm-s/rad

Diagrama de Bode de magnitud $\frac{\Theta_M}{T}(s)$



Donde:

$$\frac{\Theta_M}{T}(s) = \left[\frac{1}{(J_M + J_L)s^2}\right] \frac{J_L s^2 + B_S s + K_S}{\frac{J_L J_M}{J_M + J_L} s^2 + B_S s + K_S}$$

$$\omega_R = \sqrt{\frac{K_S (J_M + J_L)}{J_M J_L}}$$

$$\omega_{AR} = \sqrt{\frac{K_S}{J_L}}$$

En general se puede concluir que si la relación J_L/J_M (la razón de inercia) es baja, los valores de las frecuencias de resonancia y anti-resonancia son cercanos, y ocurren a alta frecuencia; si la razón de inercia se reduce, los valores de las frecuencias de resonancia y anti-resonancia se alejan y ocurren a frecuencias menores.

Dada una inercia rotacional de carga, J_L, para aumentar la frecuencia de resonancia es preciso aumentar la rigidez de los ejes (lo que tiene un límite práctico), o reducir el momento de inercia del motor, J_M, lo que significa usar un motor "pequeño", operando a alta velocidad, en vez de uno "grande" operando a baja velocidad, lo que tiene como consecuencia utilizar una relación de transferencia alta en la caja de acople.

Para que el sistema sea estable es preciso que ninguna armónica del par coincida con la frecuencia de resonancia de alguno de los ejes en el sistema; además de causar problemas de estabilidad las resonancias mecánicas pueden tener efectos destructivos sobre los componentes mecánicos donde se concentren las vibraciones.

Acople destruido por vibración resonante.