Aproximaciones para filtros analógicos

Un filtro ideal debe transmitir sin cambios las señales en una determinada gama de frecuencias, llamada banda pasante, y rechazar todas las demás, la banda eliminada. Esto, en la práctica, es imposible por razones físicas, por lo cual se emplean una serie de aproximaciones matemáticas que cumplen con las características deseadas, dentro de ciertas especificaciones de diseño. En este resumen se presentan las ecuaciones de interés para las cinco aproximaciones más comunes. Todas ellas corresponden a filtros pasa-bajos normalizados, en los que alguna frecuencia crítica es igual a 1 rad/s. Esta variable de frecuencia normalizada se indica como "ϖ". La teoría resumida a continuación se presenta en detalle en las referencias [1] a [3].

1.- Aproximación Butterworth.

Es derivada a partir del requisito de que el módulo de la función de transferencia sea máximamente plano alrededor de $\varpi = 0$. La forma resultante es:

$$\left| H(j\varpi) \right|^2 = \frac{1}{1 + \varpi^{2n}} \tag{1.1}$$

La atenuación de un filtro se define como:

$$A(\omega) = 10 \log \left| H(j\omega) \right|^2$$

por lo cual A(1) = 3 dB, es decir, $\varpi = 1$ rad/s es el punto de potencia mitad.

El orden del filtro para la aproximación Butterworth puede obtenerse a partir de (1.1) resolviendo para n:

$$n \geq \frac{\log\{[(10^{Aa/10} - 1)/(10^{Ap/10} - 1)]^{1/2}\}}{\log(\varpi_a/\varpi_p)} \tag{1.2}$$

donde A_p es la atenuación máxima permitida en la banda pasante, A_a, la atenuación mínima requerida en la banda rechazada (ambas en dB), y las frecuencias ϖ_p y ϖ_a son los límites de la banda pasante y la banda rechazada, respectivamente.

Los polos de la función H(s) se distribuyen alrededor de la circunferencia unitaria:

$$s_k = e^{j\pi[(2k - 1)/2n + 1/2]} \quad 1 \le k \le n \tag{1.3}$$

Puesto que los polos complejos aparecen como pares conjugados, sólo hay que evaluar la expresión (1.3) para $1 \le k \le (n + 1)/2$. Si n es impar, $k = (n + 1)/2$ corresponde al polo real.

2.- Aproximación Chebycheff.

En la aproximación Butterworth la atenuación crece monótonamente en la banda pasante. Una solución mejor sería el distribuir este error de aproximación de manera más uniforme, lo cual lleva a las respuestas del tipo conocido como "equi-ripple". La más simple utiliza los polinomios de Chebycheff para lograr una respuesta de magnitud dada por:

$$\left| H(j\varpi) \right|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 C_n^2(\varpi)} \tag{2.1}$$

donde $C_n(\varpi) = \cos[n \cos^{-1}(\varpi)]$ es el polinomio de Chebycheff de orden n, y ε es un parámetro que determina la atenuación máxima en la banda pasante. En la aproximación Chebycheff, $\varpi = 1$ rad/s corresponde a la frecuencia a partir de la cual la atenuación crece monótonamente; en éste punto, $A(1) = 10 \log(1 + \varepsilon^2)$, que no coincide con el punto de potencia mitad, excepto en el caso $\varepsilon = 1$. El valor de n necesario es determinado a partir de (2.1), resolviendo para n:

$$n \ge \frac{\cosh^{-1}\{[(10^{Aa/10} - 1)/(10^{Ap/10} - 1)]^{1/2}\}}{\cosh^{-1}(\varpi_a/\varpi_p)} \tag{2.2}$$

Los polos de H(s), $s_k = \sigma_k + j\varpi_k$, vienen dados por:

$$\sigma_k = \sinh\left(\frac{1}{n} \sinh^{-1} \frac{1}{\varepsilon}\right) \operatorname{sen} \frac{(2k - 1)\pi}{2n} \tag{2.3.a}$$

$$\varpi_k = \cosh\left(\frac{1}{n} \sinh^{-1} \frac{1}{\varepsilon}\right) \cos \frac{(2k - 1)\pi}{2n} \tag{2.3.b}$$

De nuevo, los polos complejos deben aparecer como pares conjugados, por lo cual la expresión (2.3) sólo necesita ser evaluada para $1 \le k \le (n + 1)/2$. Si n es impar, $k = (n + 1)/2$ corresponde al polo real.

3.- Aproximación Elíptica o Cauer.

Las aproximaciones anteriores son funciones de puros polos, por lo que todos los ceros de transmisión se encuentran en el infinito. Una forma de reducir la banda de transición, es decir, lograr una caída más abrupta de la banda pasante a la rechazada, es distribuir los ceros de transmisión a lo largo del eje imaginario. Una solución de este tipo es la ofrecida por W. Cauer utilizando funciones elípticas. Aunque la deducción de la función de transferencia es muy complicada, su cálculo puede realizarse con un algoritmo relativamente simple de programar [3]. El algoritmo permite hallar H(s) directamente en la forma:

$$H(s) = \frac{H_0}{D_0(s)} \prod_{i=1}^{r} \frac{s^2 + A_{0i}}{s^2 + B_{1i}s + B_{0i}} \qquad (3.1)$$

donde:

$$r = \begin{cases} (n-1)/2 & n \text{ impar} \\ n/2 & n \text{ par} \end{cases}$$

$$D_0(s) = \begin{cases} s + \sigma_0 & n \text{ impar} \\ 1 & n \text{ par} \end{cases}$$

El primer paso es la determinación del orden del filtro, n:

$$k = \omega_p / \omega_a$$

$$k1 = \sqrt{1 - k^2}$$

$$q_0 = \frac{1}{2} \frac{1 - \sqrt{k1}}{1 + \sqrt{k1}}$$

$$q = q_0 + 2q_0^5 + 15q_0^9 + 150q_0^{13}$$

$$D = \frac{10^{Aa/10} - 1}{10^{Ap/10} - 1}$$

$$n \geq \frac{\log 16D}{\log(1/q)}$$

Se calculan luego la variables intermedias:

$$\Lambda = \frac{1}{2n} \ln \frac{10^{Ap/20} + 1}{10^{Ap/20} - 1}$$

$$\sigma_0 = \left| \frac{2q^{1/4} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m q^{m(m+1)} \sinh[(2m+1)\Lambda]}{1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m q^{m^2} \cosh(2m\Lambda)} \right|$$

$$W = \sqrt{(1 + k\sigma_0^2)\left(1 + \frac{\sigma_0^2}{k}\right)}$$

$$\Omega_i = \frac{2q^{1/4} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m q^{m(m+1)} \sin[(2m+1)\pi\mu/n]}{1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m q^{m^2} \cos(2m\pi\mu/n)}$$

$$\text{donde } \mu = \begin{cases} i & n \text{ impar} \\ i - 1/2 & n \text{ par} \end{cases} \qquad 1 \le i \le r$$

$$V_i = \sqrt{(1 - k\Omega_i^2)\left(1 - \frac{\Omega_i^2}{k}\right)}$$

Las series infinitas de las expresiones para σ_0 y Ω_i convergen rápidamente y basta con tomar tres o cuatro términos. Finalmente, los coeficientes de (3.1) vienen dados por:

$$A_{0i} = \frac{1}{\Omega_i^2}$$

$$B_{0i} = \frac{(\sigma_0 V_i)^2 + (\Omega_i W)^2}{(1 + (\sigma_0 \Omega_i)^2)^2}$$

$$B_{1i} = \frac{2\sigma_0 V_i}{1 + (\sigma_0 \Omega_i)^2}$$

$$H_0 = \begin{cases} 1 & n \text{ impar} \\ 10^{-Ap/20} & n \text{ par} \end{cases}$$

4.- Aproximación Chebycheff inversa.

Otra forma de obtener ceros en la banda rechazada es mediante la expresión:

$$\left|H(j\varpi)\right|^2 = \frac{\varepsilon^2 C_n^2(1/\varpi)}{1+\varepsilon^2 C_n^2(1/\varpi)} \qquad (4.1)$$

La frecuencia $\varpi = 1$ rad/s. corresponde al comienzo de la banda rechazada, con una atenuación $A(1) = 10 \log (1 + \varepsilon^{-2})$, la cual fija el valor de ε. El valor de n necesario es determinado a partir de (4.1), substituyendo el polinomio de Chebycheff dado por

$$C_n(1/\varpi) = \cosh[n \cosh^{-1}(1/\varpi)]$$

y resolviendo para n, con lo cual se llega a la misma expresión (2.2).

Los polos de la función deseada se pueden obtener, según (4.1), invirtiendo los polos de la aproximación Chebycheff normal. Los ceros se calculan con la expresión:

$$\omega_k = \sec(k\pi/2n), \qquad k = 1, 3, \dots, n$$

5.- Aproximación Bessel-Thompson.

Las aproximaciones vistas anteriormente tienen una característica de fase extremadamente no lineal. En aplicaciones que requieran un retardo de grupo constante, se suele utilizar una aproximación basada en los polinomios de Bessel, los cuales se definen por la relación recursiva:

$$B_n(s) = (2n - 1)\, B_{n-1}(s) + s^2\, B_{n-2}(s)$$

con:

$$B_0(s) = 1$$

$$B_1(s) = s + 1$$

Un filtro Bessel-Thompson es sencillamente la función:

$$H(s) = \frac{B_n(0)}{B_n(s)}$$

No existe una fórmula que permita calcular las raíces de $B_n(s)$, por lo cual éstas deben ser halladas numéricamente.

Los parámetros para el diseño del filtro son: el retardo deseado en baja frecuencia, el máximo error porcentual admisible en el retardo a una frecuencia dada, y la atenuación mínima deseada a esa u otra frecuencia. El diseño se realiza por ensayo y error, buscando primero el polinomio que cumpla con la especificación de error de retardo, y luego aumentando el orden del polinomio hasta lograr la atenuación requerida.

La aproximación Bessel-Thompson tiene la característica de fase lineal sólo para la función pasa-bajos. Las transformaciones de frecuencia descritas más adelante destruyen la linealidad de fase.

6.- Transformaciones de frecuencia.

Las fórmulas presentadas en los párrafos anteriores producen un filtro pasa-bajos en la frecuencia normalizada $\overline{s}$. A continuación se describen las diferentes transformaciones que permiten lograr las características de frecuencia deseadas. Se consideran las secciones de segundo orden con la forma general:

$$H_2(\overline{s}) = K \frac{a_2\overline{s}^2 + a_1\overline{s} + a_0}{b_2\overline{s}^2 + b_1\overline{s} + b_0} \tag{6.1}$$

Por supuesto, si $a_2 = b_2 = 0$, se tiene una sección de primer orden.

6.1.- Pasa-bajos a pasa-bajos.

Esta conversión requiere únicamente de un cambio de escala en el dominio de la frecuencia, definido por la relación:

$$\overline{s} = \lambda s$$

donde $\overline{s}$ es la frecuencia normalizada y s representa la frecuencia en el dominio deseado. Aplicando esta transformación a (6.1), resulta:

$$H_2(s) = \frac{(a_2\lambda^2)s^2 + (a_1\lambda)s + a_0}{(b_2\lambda^2)s^2 + (b_1\lambda)s + b_0}$$

Los nuevos coeficientes pueden leerse directamente en la expresión.

6.2.- Pasa-bajos a pasa-altos.

Esta conversión implica una inversión de la frecuencia y un cambio de escala, según la relación:

$$\bar{s} = \lambda / s$$

Aplicando esta transformación a (6.1), resulta:

$$H_2(s) = \frac{(a_0\lambda^2)s^2 + (a_1\lambda)s + a_2}{(b_0\lambda^2)s^2 + (b_1\lambda)s + b_2}$$

Los nuevos coeficientes pueden leerse directamente en la expresión.

6.3.- Pasa-bajos a pasa-banda.

Un filtro pasa-banda puede imaginarse como el producto de un pasa-bajos por un pasa-altos, con frecuencias de corte adecuadas. La conversión está dada por la relación:

$$\bar{s} = \frac{1}{B}\left(s + \frac{\omega_0^2}{s}\right) \tag{6.3.1}$$

Esta transformación indica que el orden del filtro en el dominio s es el doble que en el dominio $\bar{s}$. Cada etapa de segundo orden se convertirá en una de cuarto orden, que deberá ser separada en otras dos etapas de segundo orden. Tal separación puede ser llevada a cabo, por ejemplo, mediante el algoritmo de Geffe [1], descrito a continuación. Dado el polinomio en la variable normalizada:

$$\bar{s}^2 + 2\,\sigma\,\bar{s} + (\sigma^2 + \varpi^2) = \bar{s}^2 + \frac{\varpi_0}{Q_0}\,\bar{s} + \omega_0^2,$$ cuyas raíces son $\bar{s} = -\sigma \pm j\,\varpi$

podemos aplicar la transformación (6.3.1) para obtener el polinomio factorizado:

$$\left(s^2 + \frac{\omega_{01}}{Q}\,s + \omega_{01}^2\right)\left(s^2 + \frac{\omega_{02}}{Q}\,s + \omega_{02}^2\right)$$

Definiendo $Q_0 = \omega_0 / B$, ω_{01}, ω_{02} y Q se calculan a partir de:

i) $C = \sigma^2 + \varpi^2$ ii) $D = \dfrac{2\ \sigma}{Q_0}$

iii) $E = 4 + \frac{C}{Q_0^2}$ iv) $G = \sqrt{E^2 - 4 D^2}$

v) $Q = \frac{\sqrt{(E + G)/2}}{D}$ vi) $K = \frac{\sigma Q}{Q_0}$

vii) $W = K + \sqrt{K^2 - 1}$ viii) $\omega_{01} = \omega_0 W$

ix) $\omega_{02} = \frac{\omega_0}{W}$

6.4.- Pasa-bajos a elimina-banda.

Un filtro elimina-banda se obtiene a partir de la siguiente conversión de frecuencia:

$$\bar{s} = \frac{Bs}{s^2 + \omega_0^2}$$

Esta expresión es el inverso de (6.3.1). Este hecho se puede aprovechar haciendo primero la conversión de pasa-bajos a pasa-altos (inversión de frecuencia) con $\lambda = 1$, y convirtiendo este resultado a pasa-banda.

Bibliografía.

[1] Van Valkenburg, M. E., "Analog Filter Design", Holt-Saunders, 1982.
[2] Chen, Wai-Kai, "Passive and Active Filters", Wiley, 1986.
[3] Antoniou, A., "Digital Filters: Analysis and Design", McGraw-Hill, 1979.

Juan Claudio Regidor
Mayo 1997