TEMA 6

LOS CIRCUITOS RLC, LA RESONANCIA Y LOS FILTROS PASIVOS

Introducción.

Al circular la corriente alterna por circuitos formados por resistencias, bobinas y condensadores, debido a efectos especiales que tienen lugar como consecuencia de este tipo de corriente y de la frecuencia, el comportamiento de estos componentes, y por tanto de estos circuitos, es diferente que cuando son recorridos por corriente continua. De ahí que nos ocupemos en este tema del estudio de ellos.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

1 Teorema de Pitágoras.

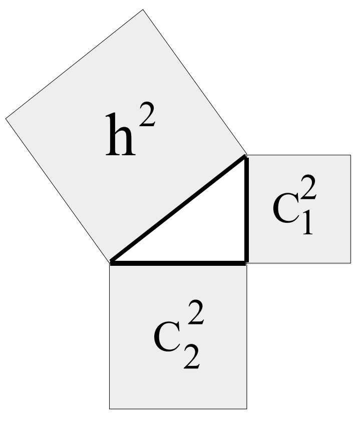
Aunque trataremos de resolver los ejercicios de este tipo de circuitos mediante los números complejos, debemos aclarar que cuando se trata de circuitos sencillos (una resistencia, una bobina y un condensador) éstos se pueden resolver por medio del teorema de Pitágoras. Lo recordamos.

El teorema de Pitágoras dice que *"el cuadrado formado sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de los cuadrados formados sobre los catetos".*

Su expresión matemática es la siguiente:

$$\boxed{h^2 = c_1^2 + c_2^2}$$

En la figura 6.1 se muestra la interpretación.

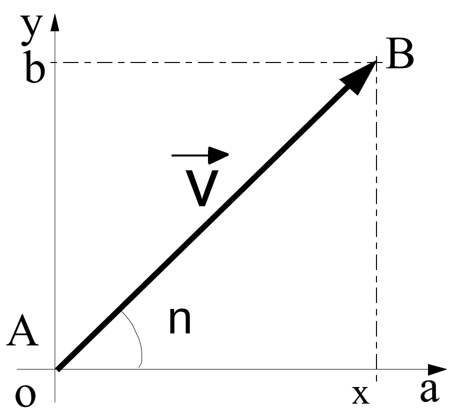


2 Trigonometría.

Para la resolución de los circuitos RLC necesitamos de los conocimientos de la trigonometría. Con lo que se ha visto en el tema de corriente alterna, de momento, nos es suficiente.

3 Vectores.

Como se recordará, un vector es un segmento orientado. Es decir, un segmento con una punta de flecha en uno de sus extremos. Véase la figura 6.2.



Los vectores se nombran diciendo primero la letra del origen seguido de la del extremo; o también diciendo la letra minúscula que lo designa. Así el vector de la figura 6.2 se puede nombrar como el vector AB o simplemente vector v.

Se representa por una letra minúscula con un pequeño vector encima de la letra.

Todo vector se caracteriza por los parámetros:

- ***Magnitud o Módulo***: es la longitud del vector o segmento. (longitud A-B). Se representa así: |v|

- ***Dirección:*** es la dirección de la recta sobre la que está representado el vector; la dirección puede ser A-B o B-A.

- ***Sentido:*** es el sentido del vector. El sentido de un vector viene dado por la punta de flecha. El vector representado posee un sentido A-B.

- ***Punto de aplicación*** u origen: es el lugar donde comienza el vector. En la figura el punto A. En este caso coincide con el origen de coordenadas.

Un vector se puede dar en función de sus coordenadas y/o descomponerse en ellas. El vector que se adjunta tiene como abscisa el segmento ***oa*** y como ordenada el segmento ***ob***. Cada una de ellas se puede calcular en función del módulo y del ángulo φ.
Así,

la componente horizontal **oa = |v| cos φ**
la componente vertical **ob** = |v| **sen** φ

Si de un vector nos dan sus componentes, podemos hallar el módulo por el Teorema de Pitágoras o mediante la trigonometría.
También haremos uso de las operaciones con vectores; sobre todo de la suma y resta.

4 Números complejos

El campo de los números complejos se creó para dar respuesta a ciertas cuestiones matemáticas que no solucionaban los números reales. Algunos de estos casos son: las raíces cuadradas (o de índice par) de los números negativos como $\sqrt{-9}$; las potencias de exponente irracional de números negativos $(-3)^{5/4}$; o los logaritmos de los números negativos (log - 4).

Se denominan números complejos al conjunto de los números reales y los imaginarios.

4.1 Definición.

Un número complejo es un ente abstracto representado por un par de números reales cualesquiera dados en un orden prefijado. Los números complejos se representan con el símbolo (a, b) siendo a y b números reales. Al número a se le llama primera componente o *componente real* y al b segunda componente o *componente imaginaria.*

4.2 Consideraciones sobre los números complejos.

1ª Todo número complejo de la forma (a, 0) (segunda componente nula) es un número real.

2ª Los números complejos no reales se llaman imaginarios.

3ª Todo número complejo de la forma (0, b) (primera componente nula), se llama número imaginario puro.

4ª Toda unidad imaginaria se representa por **"i"** (nosotros en electricidad y electrónica utilizaremos la letra **"j"**) y corresponde al número complejo imaginario puro (**0, 1**) ó sea, a $\sqrt{-1}$; luego

$$(0, 1) = i = \sqrt{-1}.$$

por tanto:

$i = \sqrt{-1}$	$i^2 = -1$

4.3 Expresiones de los números complejos.

Todo número complejo se puede expresar de varias formas:

1ª Forma compleja: se expresa por (**a, b**) cuyo significado ya conocemos.

2ª Forma binómica: se expresa por **a + bi** donde **a** representa la parte real y **b** las unidades imaginarias.

3ª Forma factorial o trigonométrica: en este caso se dan las componentes **a** y **b** en función del ángulo y de sus razones trigonométricas. Estas dos componentes son:

$$a = r \cos \varphi$$
$$b = r \operatorname{sen} \varphi$$

y el módulo **z = r (cos φ + sen φ)**

4ª Forma módulo-argumental o polar: todo número complejo queda determinado si se conocen su módulo y su argumento o ángulo. En esta forma se expresa así (r_φ).

4.4 Representación geométrica de un número complejo.

Los números complejos se representan por los puntos de un plano referidos a un sistema de coordenadas, bien cartesianas o bien polares.

Analicemos el caso de las coordenadas cartesianas. Sea el número complejo representado por un punto P (figura 6.3).
Dicho punto se proyecta sobre los ejes. La proyección sobre el eje de abscisas representa la componente real y la proyección sobre el eje de ordenadas representa la componente imaginaria.
El punto P se llama **afijo** del complejo.

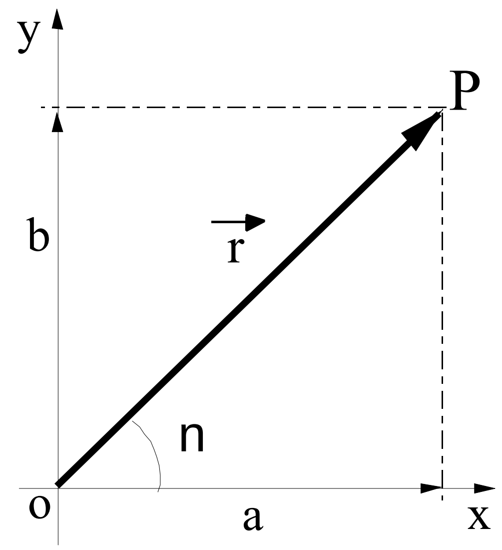


Figura 6.3

Módulo es la distancia OP de su afijo al origen de coordenadas. Su valor se calcula por Pitágoras.

Argumento es el ángulo que forma el segmento OP (módulo) con el eje horizontal. Este ángulo viene dado por:

$$\varphi = \text{arc sen } b/r = \text{arc cos } a/r = \text{arctg } b/a$$

Vector asociado es el vector OP.
Como se observará, los números complejos son, en la práctica, vectores; sólo que su origen **siempre** está situado en el origen de coordenadas.

4.5 Igualdad y desigualdad de números complejos.

a) Dos números complejos son iguales cuando tienen el mismo afijo; es decir, cuando se representan geométricamente en el mismo punto.

b) Dos números complejos son iguales cuando tienen, respectivamente iguales, sus componentes reales e imaginarias.

Ejemplo: a + bi = c + di <==> a = c y b = d

c) Dos números complejos dados en forma trigonométrica son iguales cuando tienen iguales sus módulos y sus argumentos son iguales o difieren en k x 360º o en 2kπ (si el ángulo viene dado en radianes), siendo k un número entero.

4.6 Números complejos nulos, opuestos y conjugados.

Nulos.

a) en forma compleja: cuando sus dos componentes son nulas.
b) en forma polar: basta con que sea nulo el módulo.

Opuestos.

a) en forma compleja y binómica: cuando tienen sus dos componentes opuestas (a = - a´ y b = - b´). Así, el número complejo (7, 4) es opuesto al (-7, -4). Del mismo modo lo son los complejos: 3 + 4i y el -3 - 4i.
b) en forma módulo argumental: cuando sus módulos son iguales y sus ángulos o argumentos difieren en 180º (o en π) o en un número impar de estos.

Conjugados.

a) en forma compleja o binómica: cuando sus componentes reales son iguales y sus componentes imaginarias son opuestas. El complejo conjugado a (3, 4) es (3, -4). De igual forma lo son -3 + 5i y -3 -5i.
b) en forma polar: si sus módulos son iguales (r = r´) y sus argumentos opuestos (φ = - φ).

4.7 Operaciones con números complejos.

4.7.1 En forma compleja y/o binómica.

Suma y resta.

La suma o resta de dos o más números complejos es otro número complejo cuya componente real es la suma o resta de las componentes reales y cuya componente imaginaria es la suma o resta de las componentes imaginarias de los números complejos a sumar o restar.

(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i

Ejemplos:

(3, 5) - (2, -6) + (3, -1) = (**4, 10**)

(5 + 3i) + (-2 + 7i) - (8 - 4i) =
[(5 -2 -8) + (3 + 7 +4)i] = **- 5 + 14i**

Observaciones:

a) la suma de dos números complejos opuestos es igual a cero.
b) la suma de dos complejos conjugados es igual al duplo de su componente real.
c) la representación geométrica de la suma aparece en la figura 6.4.

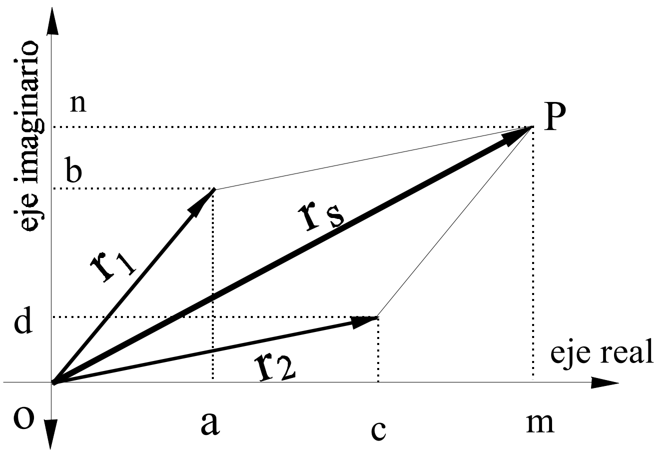


Figura 6.4

<u>Producto.</u>

Para multiplicar dos números complejos se multiplican los binomios complejos como si fueran binomios algebraicos.

Ejemplo.

$(a + bi) \times (c + di) = (ac + adi + cbi + bd\, i^2) =$

(ac - bd) + (cb + ad)i

Nota: ojo, no olvidemos que $i^2 = -1$.

<u>Cociente.</u>

El cociente de dos números complejos (a + bi) y (c + di) es otro número complejo (m + ni) tal que multiplicado por el complejo divisor (c + di) dé como resultado el complejo dividendo (a + bi).

4.7.2 En forma polar.

<u>Producto.</u>

Para multiplicar dos o más números complejos se multiplican los módulos y se suman los argumentos.

Ejemplo: $5_{30º} \times 6_{42º} \times 2_{20º} = 60_{92º}$

<u>Cociente.</u>

Para dividir dos números complejos se dividen los módulos y se restan los argumentos.

Ejemplo: $28_{35º} / 4_{24º} = 7_{11º}$

5 Leyes de Kirchhoff.

Recordemos solamente los enunciados.

La ley de los nudos dice que *"en todo nudo eléctrico, la suma vectorial de las corrientes que a él se acercan es igual a la suma vectorial de las corrientes que de él se alejan"*.

La ley de mallas dice que *"en toda malla o circuito eléctrico cerrado, la suma vectorial de las fuerzas electromotrices aplicadas es igual a la suma vectorial de las caídas de tensión que en ella se producen"*.

6 La reactancia inductiva.

Cuando una bobina es recorrida por una corriente variable (corriente alterna), en su interior se crea un flujo magnético variable. Como consecuencia, se inducirá en ella una f.e.m. inducida de sentido contrario (según la Ley de Lenz) a la variación de la corriente que la crea.

La f.e.m. inducida vale $\mathbf{v = - L\, \Delta I / \Delta t}$

(el signo "menos" es por la Ley de Lenz)
Por otro lado, en la bobina se almacena una energía en forma electromagnética que vale:

<u>$E = L\, I^2 / 2$ en Julios</u>.

Se demuestra que el valor eficaz de le f.e.m inducida en una bobina vale $\mathbf{V = 2\, \pi\, f\, L\, I}$
Al coeficiente 2π f L, que hace el efecto de una resistencia, se le llama reactancia inductiva, se

representa por X_L y vendrá dada en ohmios, cuando la frecuencia venga en Hertzios y el coeficiente de autoinducción en Henrios.
Así pues, la reactancia inductiva de una bobina vale:

$$\boxed{X_L = 2\,\pi\, f\, L}$$

En una bobina ideal (la que no tiene resistencia óhmica ni capacidad, que por otra parte no existe) la corriente sufre un retraso de 90º respecto de la tensión aplicada.

7 La reactancia capacitiva.

Cuando un condensador se conecta a una corriente alterna, el condensador se va cargando y descargando con la misma frecuencia que la de la tensión aplicada. Esto, a efectos prácticos, equivale a que por el circuito circula una corriente alterna cuyo valor eficaz viene dado por la fórmula:

$$I = 2\pi\, f\, C\, V$$

siendo
- V el valor eficaz de la tensión aplicada al condensador, en voltios,
- f la frecuencia de la tensión aplicada, en Hertzios, y
- C la capacidad del condensador, en Faradios.

Si despejamos la tensión, tenemos que:

$$V = I \;/\; 2\pi\, f\, C$$

Por analogía con la Ley de Ohm (V = RI), tendremos que $1/2\pi\, f\, C$ tiene carácter de resistencia.

Pues bien, este término es lo que se llama reactancia capacitiva; se represent por Xc y vale:

$$\boxed{Xc = 1 \,/\, 2\pi\, f\, C}$$

La reactancia capacitiva, o capacitativa, viene dada en ohmios si la frecuencia viene dada en Hertzios y la capacidad en Faradios.

Un condensador ideal retrasa la tensión 90ı respecto de la intensidad; o lo que es igual, adelanta la corriente 90º respecto a la tensión. Hace, pues, el efecto contrario a las bobinas.

8 Concepto de impedancia.

Cuando hablamos de la reactancia inductiva veíamos cómo no existía ninguna bobina ideal, porque todas tienen una cierta resistencia debida al hilo con que están confeccionadas. Existen, pues, en toda bobina conectada a una corriente alterna dos tipos de resistencia: una la debida al hilo conductor ($R_L = \rho\, l\,/S$) y otra, la reactancia inductiva, ($X_L = 2\pi fL$) debida a la inductancia de la propia bobina y a la frecuencia de la fuente de energía.

Debido a esto, el teórico ángulo de desfase de 90º entre la tensión y la corriente no es tal, sino menor.

La combinación de estos dos tipos de resistencia da una resistencia, llamada *aparente*, y que se corresponde, según la Ley de Ohm, con el valor de la resistencia que presentaría el circuito si no hubiera efecto de inductancia.

Esta resistencia aparente que vale V_{eficaz}/I_{eficaz} recibe el nombre de impedancia. Se representa por Z. Su expresión en forma compleja o vectorial es:

$$\boxed{\vec{Z} = \vec{R} + j\vec{X}}$$

donde *R es la componente resistiva* y *X es la componente reactiva.*

Otro tanto ocurre con los condensadores reales (aquellos que presentan algún tipo de pérdidas). O en un circuito mixto (R-L-C).
Lo veremos más claro y con mayor detalle cuando analicemos los circuitos RLC.

9 Conceptos de Admitancia, conductancia y susceptancia.

Admitancia. Es la expresión inversa de la impedancia. Se representa por Y. Su unidad es el mho (Ohm al revés) o el Siemens.

Su expresión en forma compleja es:

$$\vec{Y} = 1/\vec{Z} = 1 \,/\, (\vec{R} + j\vec{X}) = \vec{G} + j\vec{B}$$

Conductancia. Se llama así a la componente G de la expresión compleja de la admitancia. Es decir, la parte real de la admitancia.

Susceptancia. Se entiende como tal la componente B de la expresión compleja de la admitancia. Es decir, la parte compleja o imaginaria de la admitancia.

10 Conceptos de potencia aparente, potencia activa y potencia reactiva.

Recibe el nombre de potencia aparente el producto de los valores eficaces de la tensión aplicada a un circuito por la corriente que lo recorre.

Se representa por Pap y su unidad es el voltiamperio o voltamperio.

Se denomina potencia activa o potencia real de un circuito al producto de la potencia aparente por el coseno del ángulo que forman la tensión y la corriente. Es debida a la componente resistiva de la carga*. Se representa por Pac y su unidad es el watio*.

Existe una unidad práctica de potencia que es el caballo de vapor (HP -Horse Power- en inglés) que equivale a 736 watios).

Se entiende por potencia reactiva al producto de la potencia aparente por el seno del ángulo que forman la tensión y la corriente. Es debida a la componente reactiva de la carga. *Se representa por Preac y su unidad es el watio reactivo o voltiamperio reactivo*.

Nota: estos tipos de potencias se dan en aquellos circuitos donde la carga no es puramente óhmica. Caso contrario, el único tipo de potencia que existe es la activa.

CIRCUITOS R - L - C SERIE

11 Circuito con resistencia.

Supongamos una resistencia óhmicamente pura (desprovista de autoinducción y de capacidad) a la que se aplica una tensión alterna senoidal. Esta tensión originará por el circuito una corriente, también senoidal, totalmente en fase con la tensión aplicada y de su misma frecuencia.

En la figura 6.5 se ha representado el circuito eléctrico (figura a), el diagrama vectorial formado por la tensión y la corriente (figura b) que se puede observar están en fase y, por último, las senoides de la tensión aplicada (o caída de tensión en la resistencia) y la corriente que recorre el circuito (figura c).

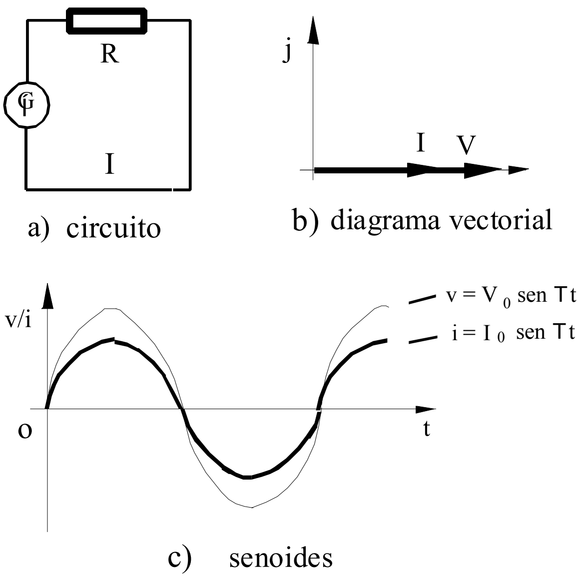


Figura 6.5

Podemos decir, a la vista de los resultados, que al alimentar una resistencia puramente óh-mica con una tensión de cc o con una tensión alterna senoidal con idéntico valor eficaz que el de la cc, los efectos son los mismos. Precisamente de aquí se obtiene la definición de valor eficaz de una corriente alterna.

12 Circuito con inductancia pura.

Sea la bobina, supuestamente ideal, de la figura 6.6 a la que se aplica una tensión alterna senoidal. Ya dijimos que una bobina ideal retrasa 90º la corriente respecto de la tensión aplicada (figuras b y c).

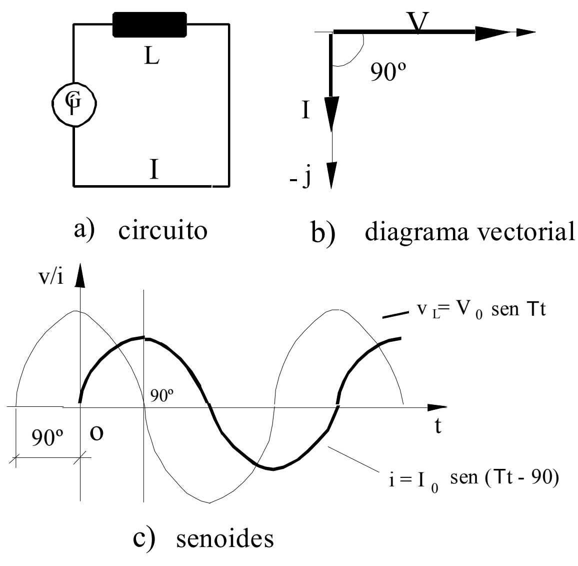


Figura 6.6

En este circuito la única "resistencia" que aparece es la reactancia inductiva, por lo que la corriente eficaz que circula por el circuito será:

$$\mathbf{I = V / X_{L\,(90^{o}} = V / j2\pi\, fL =}$$
$$\mathbf{jV / j^2\, 2\pi fL = -jV / 2\pi fL = -jV / j\,\omega L}$$

La corriente instantánea que circula por el circuito es $i = Io \text{ sen } (\omega t - 90^{o})$

Observaciones:
La potencia (potencia activa o real) absorbida por una bobina ideal es cero, pues no existe resistencia óhmica.
La tensión y la corriente están en cuadratura; o sea, desfasadas 90º, por tanto, el factor de potencia o coseno n es nulo.

13 Circuito con condensador ideal.

Al conectar un condensador ideal (recordemos que es el que está totalmente desprovisto de resistencia) como el de la figura 6.7 a una fuente de tensión alterna, ocurre que a medida que la tensión va aumentando, el condensador se va cargando, y cuando aquella va disminuyendo, el condensador se va descargando. Todo esto ocurre con la misma rapidez con que cambia el sentido de la tensión aplicada.

Como consecuencia, se establece en el circuito una corriente alterna de la misma frecuencia que la de la tensión de alimentación.

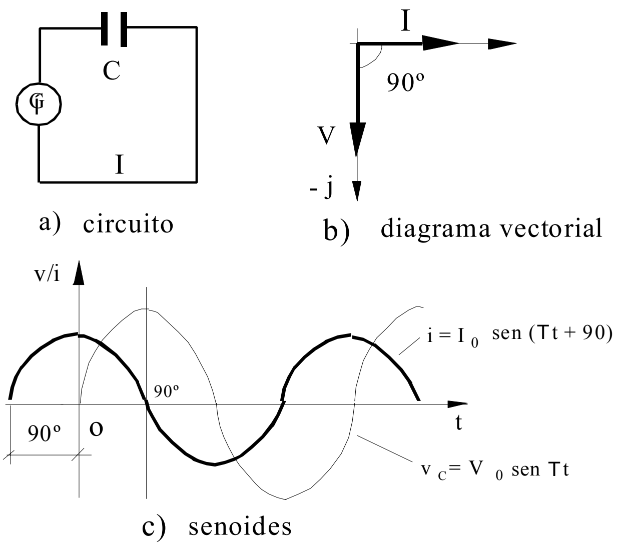


Figura 6.7

Teniendo en cuenta que el valor máximo de la tensión tiene lugar al cuarto de periodo (90º), -ver figura 6.7,c- y que la cantidad de electricidad -en culombios si C viene en Faradios y V en voltios- acumulada en cada armadura del condensador es $Q = C \times V$, tendremos que al cabo de los 90º la cantidad de electricidad acumulada será:

$$Q_0 = C \times V_0$$

Por tanto, el valor medio de la intensidad será:

$$\mathbf{I_{med} = Q_0 / t = C\, V_0 / T/ 4 = 4\, C\, V_0 / T}$$

Pero como $1/T = f$, tendremos que:

$$\mathbf{I_{med} = 4\, f\, C\, V_0}$$

Pasando a valores eficaces la corriente y la tensión tendremos que:

$$\mathbf{I = V / Xc_{\,(-90^{o}} = V / (-j) / \omega C = V\, \omega C / -j =}$$
$$\mathbf{j\, V\, \omega C / -j^2 = j\, V\, \omega C = jV\, 2\pi\, f\, C}$$

$$\mathbf{V = Xc_{\,(-90^{o}} = (-j) / \omega C = -jI / \omega C = -jI / 2\pi\, f\, C}$$

La corriente va 90º en adelanto respecto de la tensión, o lo que es lo mismo, la tensión va 90º en retraso respecto de la corriente.
Los condensadores hacen lo contrario que las bobinas.
La corriente instantánea circulante en el circuito es

$$\mathbf{i = Io \text{ sen } (\omega t + 90\text{ı})}$$

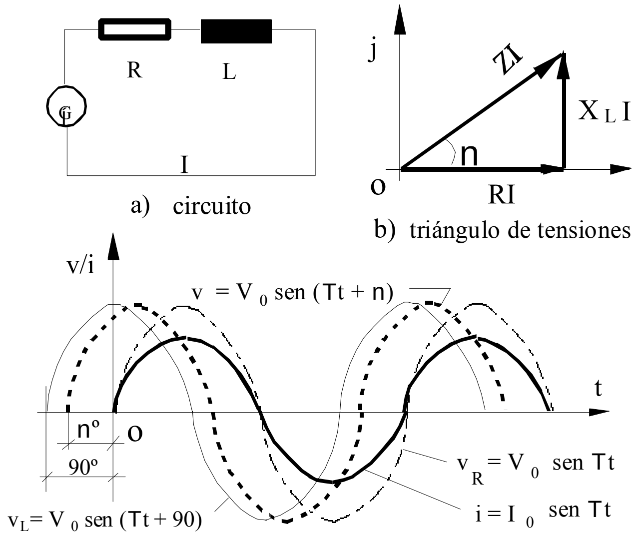
Todo lo tratado se puede observar en la figura 6.7.

14 Circuito con resistencia y autoinducción. Circuito R-L.

Sea el circuito de la figura 6.8,a constituido por una resistencia y una bobina. También se puede considerar este circuito formado por una bobina real; es decir, considerando la resistencia óhmica de la misma. (Desconsideramos la capacidad de la bobina por ser la frecuencia de la tensión aplicada pequeña).

Al aplicarle una tensión alterna senoidal, el circuito será recorrido por una corriente también alterna senoidal de la misma frecuencia.
Esta corriente dará lugar a dos tipos de caídas de tensión diferentes en el circuito: una caída de tensión *óhmica* debida a la resistencia óhmica, R, del circuito cuyo valor es RI y que estará en fase con la corriente y otra *inductiva o reactiva* debida a la reactancia de la bobina, X_L, cuyo valor es X_L I y desfasada 90º en adelanto respecto a la "caída de tensión óhmica".

En todo momento, la suma de ambas caídas de tensión debe ser igual a la tensión aplicada, que a su vez es igual a ZI, (Ley de Kirchhoff). Pero como no están en fase, la suma debe ser vectorial o geométrica. Ver figura 6.8,b: triángulo de tensiones.



c) senoides

Figura 6.8

Tenemos, por tanto:

- caída de tensión en la resistencia:
  $\mathbf{V_R = R_{(0^\circ} I}$ (en fase con la corriente)

- caída de tensión en la bobina
  $\mathbf{V_L = X_{L\,(90^\circ} \times I}$ (90º en adelanto sobre la corriente)

- tensión total $\mathbf{V = Z_{(n} I}$ (en adelanto n grados respecto de la corriente)

De la figura 6.8,b, conocida como triángulo de tensiones, se deduce (por Pitágoras) que

$$\vec{\mathbf{V}}^2 = \vec{\mathbf{V}}_R^{\,2} + \vec{\mathbf{V}}_L^{\,2}$$

Impedancia. Triángulo de resistencias.

La impedancia del circuito en forma compleja es:

$$\vec{Z} = \vec{R} + j\,\vec{X}_L$$

El módulo de la impedancia es: $|z| = \sqrt{R^2 + X_L^{\,2}}$

El argumento o ángulo de desfase es:

$$\mathbf{n = \arccos\ R / Z = \operatorname{arc\,tg}\ X_L / R}$$

El factor de potencia o coseno de fi es:

$$\mathbf{Cos\ n = R / Z}$$

La corriente que circula por el circuito vale:

$$\mathbf{I = V_{(0^\circ} / Z_{(n} = I_{(-n}}$$

El triángulo de resistencias o impedancias es el de la figura 6.8,b sin más que dividir cada uno de los vectores por la intensidad. También se puede observar en las figuras 6.9,a (triángulo *OAB)* y 6.9,b (triángulo *ABC)*, que de las dos formas se suele representar.

Tensiones. Triángulo de tensiones.

Antes hemos visto las distintas caídas de tensión. El triángulo de tensiones es la propia figura 6.8,b. También lo es el triángulo *OCD* de la figura 6.9,a o el triángulo *DEF* de la figura 6.9,b.

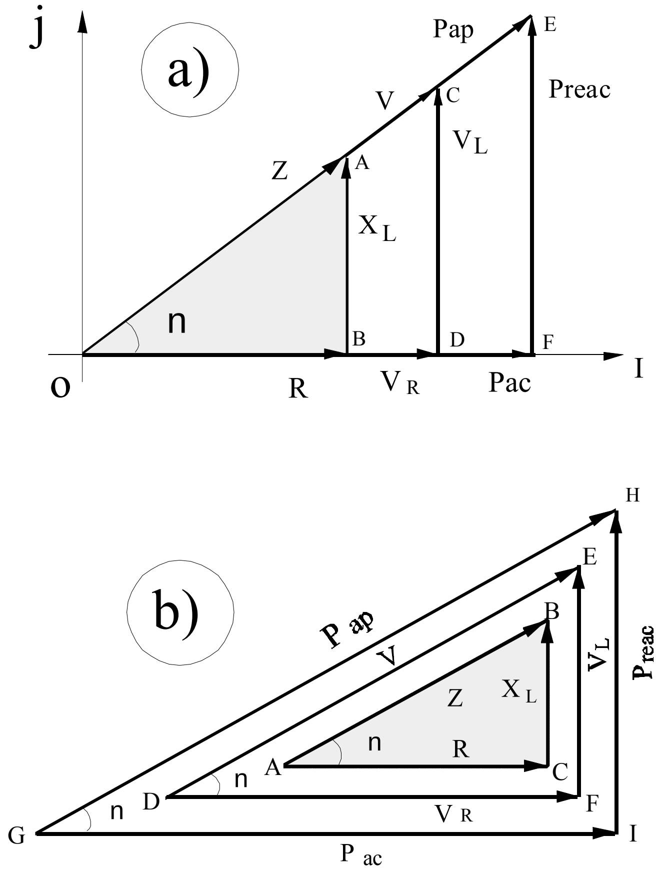


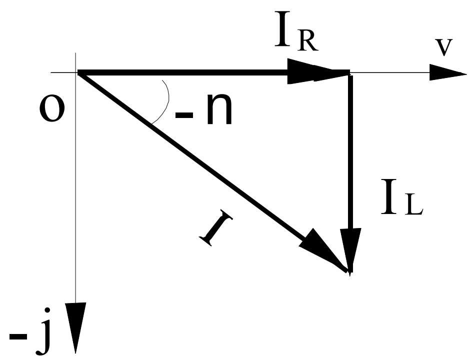
Figura 6.9

Sus valores son:

$$\mathbf{V = Z_{(n}\ I}$$
$$\mathbf{V_R = R_{(0^\circ}\ I = V \cos n}$$
$$\mathbf{V_L = X_{L\,(90^\circ}\ I = V\ sen n}$$

Corrientes. Triángulo de corrientes.

Ya hemos visto cómo la corriente queda retrasada un ángulo n con respecto de la tensión.
Este valor queda descompuesto en dos componentes: una, I_R, en fase con la tensión y otra, I_L, retrasada 90º respecto de la anterior (figura 6.10).



triángulo de corrientes

Figura 6.10

La I_R se llama de *corriente activa* y su valor es

$$I_R = I \cos(-n)$$

La I_L se llama *corriente magnetizante o reactiva* y vale

$$I_L = I \operatorname{sen}(-n)$$

La I total vale: $$|I| = \sqrt{I_R^{\,2} + I_L^{\,2}}$$

Potencias. Triángulo de potencias.

En este circuito aparecen tres tipos de potencia:

La potencia aparente representa la potencia total suministrada por la fuente o la total absorbida por la carga y vale:

$$\mathbf{P_{ap} = Z_{(n} I^2}$$ en voltamperios.

La potencia activa es la absorbida por la resistencia y vale:

$$\mathbf{P_{ac} = R_{(0^o} I^2 = P_{ap} \cos n}$$ en vatios.

La potencia reactiva es la absorbida por la bobina y vale:

$$\mathbf{P_{reac} = X_{L(90^o} I^2 = P_{ap} \operatorname{sen} n}$$

en vatios reactivos o voltamperios reactivos.

El triángulo de potencias se puede observar en la figura 6.9,a (triángulo *OEF*) y en la figura 6.9,b (triángulo *GHI*).

Nota final:
Si se tratara de varias resistencias y autoinducciones, los triángulos de resistencias, tensiones y corrientes se constituirían por la composición de cada uno de los correspondientes a cada célula R-L. Se comenzaría por el primero de ellos y a continuación se llevaría el correspondiente a la segunda célula; luego se llevaría el correspondiente a la tercera y así sucesivamente.

Como ejemplo se propone la resolución del siguiente ejercicio, cuyas soluciones se facilitan:

Tenemos una resistencia de 0,628 ohmios y una bobina de 2 mH. Le aplicamos una f.e.m. alterna senoidal de 6,28v a una frecuencia de 50Hz. Hallar:

a) la reactancia de la bobina,
b) la impedancia total del circuito,
c) el ángulo de desfase,
d) coseno de n,
e) la intensidad de corriente por el circuito, y
f) las tensiones del circuito,
g) potencias del circuito.

Soluciones:

a) $X_L = 0{,}628_{(90^o}$A
b) $Z_t = 0{,}885_{(45^o}\Omega$
c) $n = 45^o$
d) Cos $n = 0{,}707$
e) $I = 7{,}1_{(-45^o}$A; $I_R = 5_{(0^o}$A; $I_L = 5_{(-90^o}$A
f) $V = 6{,}28V_{(45^o}$; $V_R = 4{,}45V_{(0^o}$; $V_L = 4{,}45_{(90^o}$V
g) $P_{ap} = 44{,}58_{(45^o}$VA ; $P_{ac} = 31{,}65_{(0^o}$W ;
$P_{reac} = 31{,}65_{(90^o}$Wr

15 Circuito con resistencia y condensador. Circuito R-C.

Sea el circuito de la figura 6.11 formado por la resistencia pura R y el condensador C.
Al aplicar al circuito una tensión alterna senoidal de V voltios de valor eficaz y de frecuencia f en Hertzios, será recorrido por una corriente alterna senoidal de la misma frecuencia que la de la tensión de alimentación.

Esta corriente dará lugar a dos tipos de caídas de tensión diferentes: una, V_R, debida a la resistencia R, en fase con la corriente, cuyo valor es RI, y otra, Vc, de valor X_C I retrasada 90º respecto de la corriente.
En todo momento, la suma vectorial o geométrica de ambas caídas de tensión debe ser igual a la tensión aplicada.

Tenemos, por tanto:

- caída de tensión en la resistencia
  $\mathbf{V_R = R_{(0^\circ}}\ I$ (en fase con la corriente)
- caída de tensión en el condensador
  $\mathbf{Vc = Xc_{(-90^\circ}\ I}$ (90º en retraso respecto de la corriente)
- tensión total
  $V = Z_{(-n^\circ}\ I$ en retraso n grados sobre la corriente)

De la figura 6.11,b, conocida como triángulo de tensiones, se deduce (por Pitágoras) que:

$$\mathbf{V^2 = V_R^2 + V_C^2}$$

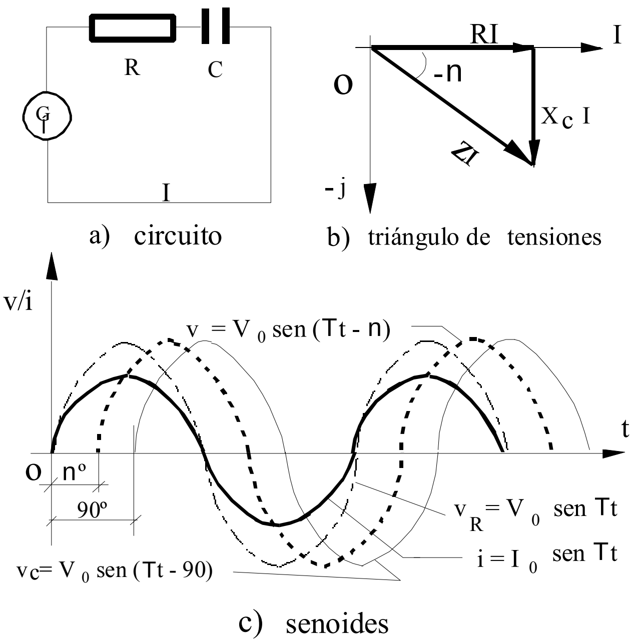


Figura 6.11

Impedancia. Triángulo de resistencias.

La impedancia del circuito en forma compleja es:

$$\mathbf{\vec{Z} = \vec{R} - j\,\vec{X}_C}$$

El módulo de la impedancia es:

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X_C^{\ 2}}$$

El argumento o ángulo de desfase es:

$$\mathbf{n = -\,arc\ cos\ R / Z = -\,arc\ tg\ X_C / R}$$

El factor de potencia o coseno de n es:

$$\mathbf{cos\ n = R / Z}$$

La corriente por el circuito vale:

$$\mathbf{I = V_{(0^\circ} / Z_{(-n} = I_{(n}}$$

El triángulo de resistencias o impedancias es la propia figura 6.11,b sin más que dividir cada uno de los vectores por la intensidad.
También se puede observar en la figura 6.12,a (triángulo *OAB*) y en la figura 6.11,b (triángulo *ABC*), que de las dos formas se suele representar.

Tensiones. Triángulo de tensiones.

Ya hemos visto antes las distintas caídas de tensión. El triángulo de tensiones es la propia figura 6.11,b. También lo es el triángulo *OCD* de la figura 6.12,a o el triángulo *DEF* de la figura 6.12,b. La tensión en el condensador va retrasada 90º respecto de la intensidad.

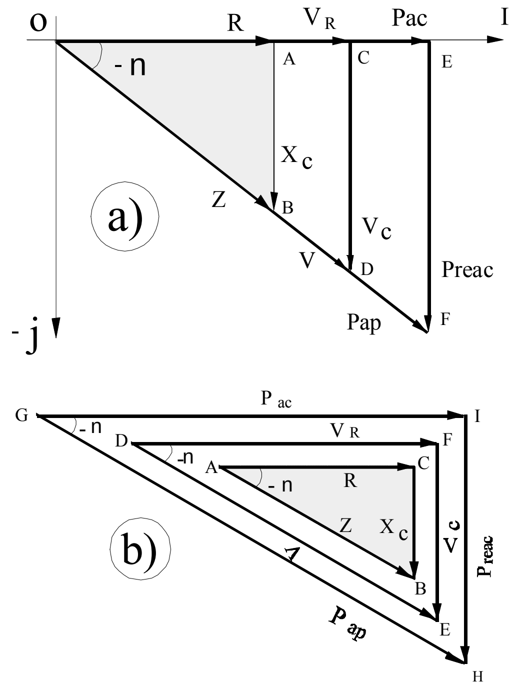


Figura 6.12

Sus valores son:

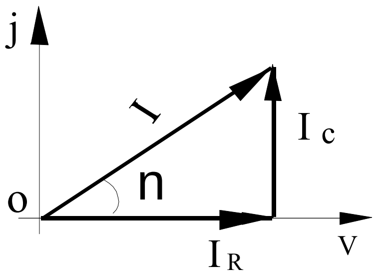
$\mathbf{V = Z_{(-n}\ I;}$
$\mathbf{V_R = R_{(0^\circ} I = V\ cos\ (-n);}$
$\mathbf{V_C = X_{C\ (-90^\circ} I = V\ sen\ (-n)}$

Corrientes. Triángulo de corrientes.

Ya hemos visto como la corriente queda adelantada un ángulo n con respecto de la tensión.
Este valor queda descompuesto en dos componentes: una, I_R, en fase con la tensión y otra, I_C, adelantada 90º respecto de la anterior.

La I_R se denomina *corriente activa* y su valor es:

$$\mathbf{I_R = I \cos n}$$



triángulo de corrientes

Figura 6.13

La I_C se denomina *corriente reactiva* y vale

$$\mathbf{I_C = I \,sen\, n}$$

La I total vale: $|I| = \sqrt{I_R^{\,2} + I_C^{\,2}}$

Potencias. Triángulo de potencias.

En este circuito aparecen tres tipos de potencia:

La potencia aparente representa la potencia total suministrada por la fuente o la total absorbida por la carga y vale:

$\mathbf{P_{ap} = Z_{(-n} I^2}$ en voltamperios.

La potencia activa es la absorbida por la resistencia y vale:

$\mathbf{P_{ac} = R_{(0^\circ} I^2 = P_{ap} \cos(-n)}$ en vatios.

La potencia reactiva es la absorbida por el condensador y vale:

$\mathbf{P_{reac} = X_{C(-90^\circ} I^2 = P_{ap}\, sen\,(-n)}$

en vatios reactivos o voltamperios reactivos.

El triángulo de potencias se puede observar en la figura 6.12,a (triángulo *OEF*) y en la figura 6.12,b (triángulo *GHI*).

Nota final:

Si se tratara de varias resistencias y capacidades, los triángulos de resistencias, tensiones y corrientes se constituirían por la composición de cada uno de los correspondientes a cada célula R-C. Se comenzaría por el primero de ellos y a continuación se llevaría el correspondiente a la segunda célula; luego se llevaría el correspondiente a la tercera y así sucesivamente.

Como ejemplo se propone la resolución del siguiente ejercicio, cuyas soluciones se facilitan:

Una resistencia de 500 ohmios y un condensador de 16 μF en serie se alimentan con 220v/50Hz. Hallar:

a) la reactancia del condensador,
b) la impedancia total del circuito,
c) el ángulo de desfase,
d) coseno de n,
e) la intensidad de corriente por el circuito,
f) las tensiones del circuito, y
g) potencias del circuito.

Soluciones:

a) $X_C = 199_{(-90^\circ}\Omega$

b) $Z_t = 538_{\,(-21{,}70^\circ}\Omega$

c) n = -21,70º = -21º 42’

d) Cos n = 0,9291

e) $I = 0{,}4_{(21^\circ 42'}$ A;
$I_R = 0{,}379_{(0^\circ}$ A;
$I_C = 0{,}150_{(90^\circ}$A

f) $V = 220_{\,(-21^\circ 42'}$ V ;
$V_R = 200_{(0^\circ}$ V;
$V_C = 81{,}2_{(-90^\circ}$ V

g) $P_{ap} = 88_{(-21^\circ 42'}$ VA ;
$P_{ac} = 81{,}75_{\,(0^\circ}$ W ;
$P_{reac} = 32{,}53_{(-90^\circ}$ Wr

16 Circuito con resistencia, inductancia y capacidad. Circuito R-L-C.

Sea el circuito de la figura 6.14,a formado por una resistencia R, una bobina o autoinducción L y un condensador de capacidad C.

Como es fácil de intuir, este circuito es una síntesis de los dos anteriores; por tanto, en él ocurrirán los fenómenos conjuntos de ambos.

Así, el triángulo de tensiones será el de la figura 6.14,b. En él se puede observar la caída de tensión en la resistencia en fase con la corriente; la caída de tensión en la bobina en adelanto 90º respecto de la corriente; y, por último, la caída de tensión en el condensador otros 90º en retraso sobre la corriente. Como las caídas de tensión en la bobina y en el condensador se encuentran desfasadas entre sí 180º (suponemos que es mayor la de la bobina), lo que hacemos es restarlas, con lo que queda como vector resultante de tensiones reactivas el vector $X_L I - X_C I$.

Impedancia. Triángulo de resistencias.

Si en la figura 6.14 dividimos cada uno de los vectores por la intensidad, tenemos las resistencias y ese será el triángulo de resistencias o impedancias.

La impedancia total en forma compleja vale:

$$\vec{\mathbf{Z}} = \vec{\mathbf{R}} + \mathbf{j}(\vec{\mathbf{X}_L} - \mathbf{X_C})$$

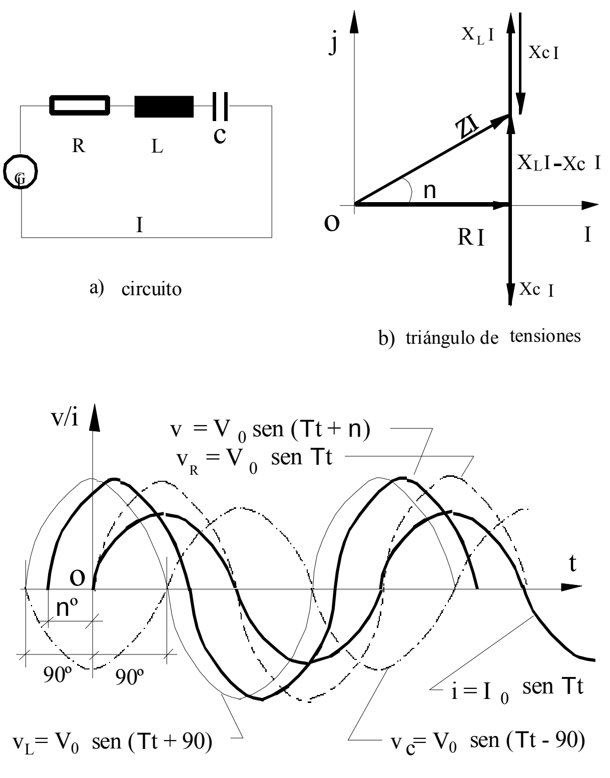


Figura 6.14

El módulo de la impedancia es:

$$|Z| = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

El argumento o ángulo de desfase vale:

n = arc tangte de $(X_L - X_C)/R$

El factor de potencia o cos n es cos $n = R / Z$

La corriente eficaz por el circuito vale:

$I = V_{(0º} / Z_{(nº} = I_{(-n}$

Tensiones. Triángulo de tensiones

De la figura 6.14,b se desprende que las caídas de tensión son:

- caída de tensión en la resistencia

  $V_R = R_{(0º} I$ (en fase con la corriente)

- caída de tensión en la bobina

$V_L = X_{L(90º} I = j\omega L I$ (en adelanto 90º respecto a I)

- caída de tensión en el condensador

$V_C = X_{C(-90º} I$ (90º en retraso sobre la corriente)

- tensión total

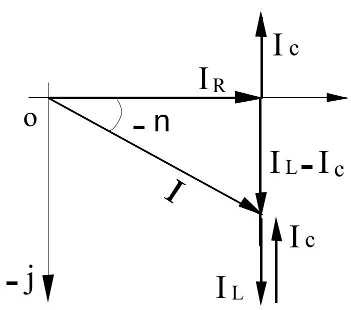
$V = Z_{(nº} I$ (en adelanto nº si X_L es mayor que X_C -en retraso en caso contrario- sobre la corriente).

En la figura 6.14 se muestran las distintas tensiones así como la corriente, tomando como referencia la corriente (figura 6.14,b) ya que ésta es común por tratarse de un circuito serie.

Corrientes. Triángulo de corrientes.

Antes vimos como la corriente queda retrasada un ángulo n con respecto de la tensión.

Este valor queda descompuesto en dos componentes: una, I_R, en fase con la tensión, otra, I_C, adelantada 90º respecto de I_R, una tercera, I_L, retrasada 90º respecto de la de la resistencia; y, finalmente, $I_L - I_C$. Ver figura 6.15.



triángulo de corrientes

Figura 6.15

La I_R se llama *corriente activa* y su valor es

$I_R = I \cos(-n)$

La $(I_L - I_C)$ se denomina *corriente reactiva total* y vale

$(I_L - I_C) = I \operatorname{sen}(-n)$

La I total vale: $|I| = \sqrt{I_R^2 + (I_L - I_C)^2}$

Potencias. Triángulo de potencias.

En este circuito aparecen tres tipos de potencia:

La potencia aparente representa la potencia total suministrada por la fuente o la total absorbida por la carga y vale:

$P_{ap} = Z_{(n^o} I^2$ en voltamperios.

La potencia activa es la absorbida por la resistencia y vale:

$P_{ac} = R_{(0^o} I^2 = P_{ap}$ cos (n) en vatios

La potencia reactiva capacitiva es la absorbida por el condensador y vale:

$P_{reac\ cap} = X_{C(-90^o} I^2 =$ en vatios reactivos o voltamperios reactivos.

La potencia reactiva inductiva es la absorbida por la bobina y vale:

$P_{reac\ ind} = X_{L(90^o} I^2 =$ en vatios reactivos o voltamperios reactivos.

La potencia reactiva total es la absorbida por el condensador y la bobina juntas y vale:

$P_{reac\ total} = (X_L - X_c)_{(90^o} I^2 =$ en vatios reactivos o voltamperios reactivos.

Como ejemplo se propone el siguiente ejercicio cuya resolución se facilita:

Una R = 10 ohmios, una L = 38,2mH y un condensador de 637 μF se conectan en serie a una red de 244v/50Hz. Hallar: Z_t, I_t, V_R, V_L, V_C, Cos n, así como las distintas potencias.
Soluciones:

$$|Z| = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{10^2 + (12-10)^2} = 12{,}2_{(35^o}\Omega$$

Ángulo de desfase
n = arc tang $(X_L - X_C)/R = 34{,}95^o \approx 35^o$
Factor de potencia: Cos n $= (X_L - X_C)/Z = 0{,}8196$

* $I_t = 244_{(0^o} V / 2{,}2_{(35^o}\Omega = 20_{(-35^o} A$
* $I_R = 20A_{(0^o}$
* $I_L = 20A_{(-90^o}$
* $I_C = 20A_{(90^o}$
* $V_R = R_{(0^o} I_t = 200\ V$
* $V_L = X_{L(90^o} I = 240_{(90^o} V$
* $V_C = X_{C(-90^o} I = 100_{(-90^o} V$
* $V = Z_{t(n} I_{t(-n} = 12{,}2_{(35^o}\ 20 = 244_{(35^o} V$
* $Pact = R I^2 = 4.000_{(0^o} W$
* $Preac\ capacitiva = X_C I^2 = 2.000_{(-90^o} VAR$
* $Preac\ inductiva = X_L I^2 = 4.800_{(90^o} VAR$
* $Preac\ total = (X_L - X_C) I^2 = 4.800 - 2.000 = 2800_{(90^o} VAR$
* $Pap = Z I^2 = 4.880_{(35^o} VA$

Si se trata de un circuito más complejo, su resolución mediante los números complejos facilita enormemente la labor. Veamos el siguiente circuito, cuyas soluciones se aportan.

En el circuito de la figura 6.16, hallar:
a) Zt (módulo y argumento);
b) cos n total;
c) I total;
d) Potencia activa total;
e) Potencia reactiva total;
f) Potencia aparente total;

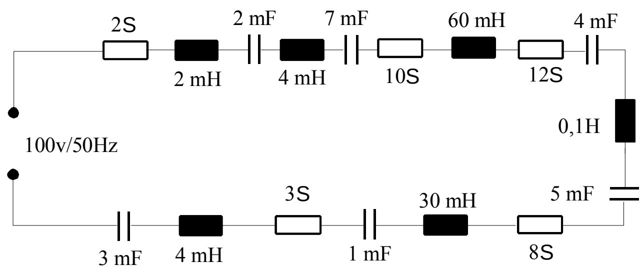


Figura 6.16

Solución:

a) $\vec{Zt} = \vec{\Sigma R} + \overrightarrow{j(\Sigma X_L - \Sigma X_c)}$

$\Sigma R = 35_{(0^o}\ \Omega$
$\Sigma X_L = 2\ \pi\ 50\ 0{,}2 = 62{,}8_{(90^o}\ \Omega$
$\Sigma X_c = 7{,}65_{(-90^o}\ \Omega$ (ojo que todos los condensadores están en serie)
n $= 57{,}6^o = 57^o\ 36'$
$Zt = 65{,}31_{(57^o\ 36'}\ \Omega$

b) Cos n = 0,5358

c) $It = 100_{(0^o} / 65{,}3_{(57{,}6^o} = 1{,}53_{(-57{,}6}$ Amperios

d) Potencia activa total:
$Pac = R_{(0^o} I^2 = 35\ 1{,}53^2 = 81{,}93_{(0^o}$watios

e) Potencia reactiva total:
$Preac = 55{,}15_{(90^o}\ 1{,}53^2 = 129{,}1_{(90^o}$ Wr (watios reactivos)

f) Potencia aparente:
$Zt_{(57^o\ 36'}\ I^2 = 65{,}3_{(57^o\ 36'}\ 1{,}53^2 = 152{,}86_{(57^o\ 36'}$ VA

RESONANCIA

17 Resonancia

Se dice que un circuito está, o entra en resonancia cuando la tensión aplicada a él y la corriente que lo recorre están en fase. De aquí se deduce que, en resonancia, la impedancia del circuito es igual a su resistencia óhmica; o lo que es igual: la reactancia del circuito es nula, por lo que ***la reactancia inductiva debe ser igual a la reactancia capacitiva***,. Como consecuencia, el cos $\varphi = 1$. Vista la impedancia en forma compleja, en resonancia la parte compleja de la impedancia debe ser nula. Esto ocurre para un determinado valor de la frecuencia -llamada frecuencia de resonancia- de la tensión alterna aplicada.

17.1 Resonancia serie o resonancia de tensión

17.1.1 Frecuencia de resonancia

Sea el circuito de la figura 6.17.En él tenemos que la impedancia total es:

$$\vec{Z} = \vec{R} + \vec{j\omega L} - \overrightarrow{(j/\omega C)} = \vec{R} + \overrightarrow{j(\omega L - 1/\omega C)}$$

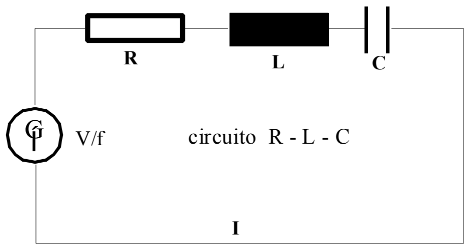


Figura 6.17

Si denominamos $\omega L - (1/\omega C) = X$ tenemos que:

$$\vec{Z} = \vec{R} + j\vec{X}$$

Para que exista resonancia, pues, debe ser nula la componente compleja; por tanto: $X = 0$; esto implica que: $\omega L - (1/\omega C) = 0$.
O sea que $\omega L = 1/\omega C$; o lo que es lo mismo:

$$2\pi f L = 1/2\pi f C$$

Despejando f, tenemos: $$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

Siendo f_0 la frecuencia de resonancia (en Hertzios si L está dada en Henrios y C en Faradios). Se suele representar por f_0. Como $2\pi f = \omega$ tenemos que ω_0 es la pulsación de resonancia en radianes/segundo.

De esta expresión se puede observar que para distintos valores de f las reactancias inductiva y capacitiva toman diferentes valores: la X_L aumentará con la frecuencia, y la X_C disminuirá a medida que la frecuencia aumenta. Ver figura 6.18.

Al existir dos variables independientes, L y C, son múltiples las combinaciones para conseguir una frecuencia de resonancia determinada (basta jugar con los valores de L y C).

17.1.2 Tensiones parciales en resonancia

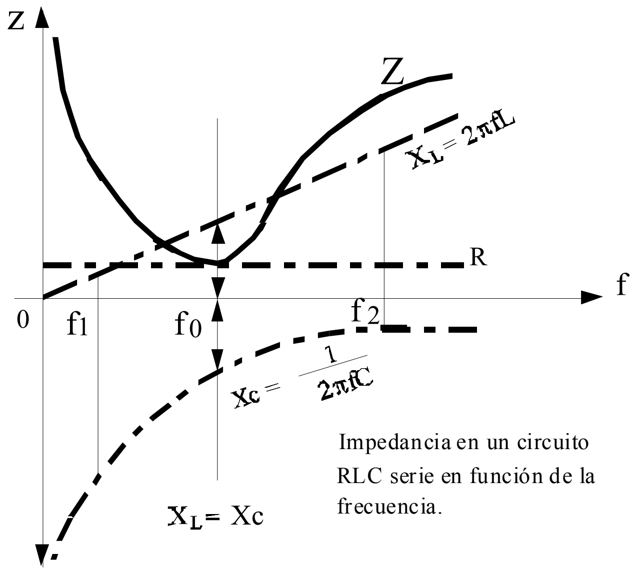


Figura 6.18

Si un circuito serie RLC como el de la figura 6.17 se alimenta con una tensión alterna con una frecuencia de resonancia, f_0, por él circulará una corriente $I_0 = V/R$ que dará lugar a las caídas de tensión parciales siguientes:

La $V_R = R_{(0^\circ} I_0$ es igual a la tensión aplicada y está en fase con ella.

La $V_L = X_{L0\,(90^\circ} I_0$ es Q_0 veces la tensión aplicada y está 90º en adelanto respecto a ella.

La $V_C = X_{C0\,(-90^\circ0} I_0$ es Q_0 veces la aplicada y está, respecto a ella, 90º retrasada.

17.1.3 Distribución de la energía almacenada en un circuito resonante serie

Si cada una de las tensiones calculadas anteriormente la multiplicamos por la intensidad, y por el tiempo, tendremos las energías absorbidas por cada elemento. Dichas energías son:

La $\varepsilon_R = R_{(0^\circ} I^2 t$

La $\varepsilon_L = X_{L0\,(90^\circ} I^2 t = ½ L I^2$

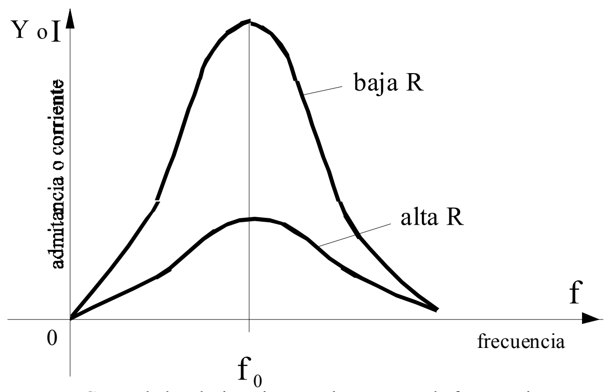
La $\varepsilon_C = X_{C0\,(-90^\circ} I^2 t = ½ CV^2$

"La energía que pierde la bobina es, en todo instante, igual a la que gana el condensador; y viceversa"

17.1.4 Curva de respuesta en frecuencia

En la figura 6.18 hemos representado las curvas de las distintas resistencias (resistencia, reactancias e impedancia -en ésta su módulo) en función de la frecuencia. En ella vemos que la R es siempre la misma; ya que su valor es independiente de la frecuencia.
La X_L crece linealmente con la frecuencia y en definitiva con la pulsación.
La X_C también crece -exponencialmente- con la frecuencia desde "menos infinito" (para cero hertzios) hasta llegar a valor cero para una frecuencia infinita. Asimismo se puede observar cómo *el módulo de la impedancia total va decreciendo hasta el valor propio de la resistencia (cosa que sucede para la frecuencia de resonancia) para volver luego a crecer rápidamente*.
En dicha figura se ve, pues, el comportamiento de la "resistencia" de los tres componentes en función de la frecuencia, así como del módulo de la impedancia total.

La fig. 6.19 muestra la curva de la admitancia (inversa de la impedancia) en función de la frecuencia.



Curva de la admitancia o corriente según la frecuencia

Figura 6.19

Observemos que es máxima a la frecuencia de resonancia. En efecto, si la impedancia es mínima en resonancia, la admitancia, como es inversa a la impedancia (Y = 1/Z), será máxima.
Como, por otra parte, la corriente es proporcional a la admitancia, se puede representar en la misma figura, cosa que así puede observarse.

17.1.5 Coeficiente o factor de calidad

Se denomina coeficiente o factor de calidad o de sobretensión a la frecuencia de resonancia de un circuito (o de una bobina), al producto de la pulsación ω por el cociente entre la máxima energía almacenada y la potencia media disipada.
Se designa por Q y vale:

$$Q = \frac{L\,\omega_0}{R} = \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Siendo Δf el ancho de banda, que veremos seguidamente.
Asimismo se define Q como la relación entre la caída de tensión en la bobina (o en el condensador) y la de la resistencia. Se suele tomar un valor mayor que 10.

Vemos, pues, que la calidad de un circuito es tanto mayor cuanto menor es la resistencia a la frecuencia de resonancia, y como quiera que la resistencia es la de la bobina, el circuito tendrá más calidad cuanto más pura sea la bobina.

17.1.6 Frecuencias de corte y ancho de banda

Las frecuencias de corte también se conocen como frecuencias límite. Son aquellas para las cuales la intensidad de corriente es 0,707 veces (70,7%) el valor de la corriente a la frecuencia de resonancia; o bien aquellas para las cuales la potencia se reduce a la mitad de la de resonancia (puntos de media potencia).
En efecto: si la potencia en resonancia es $W_0 = R\,I_0^2$ y la corriente cae a 0,707 veces la de resonancia, tenemos que $W_{f2} = W_{f1} = R\,(0{,}707\,I_0)^2 = 0{,}5\,RI_0^2$ que, es la mitad de la potencia que en resonancia.
O de otra forma: aquellas que cumplen la condición:

$$I_{f2} / I_{fo} = I_{f1} / I_{fo} = 0{,}707.$$

Así pues, ***la frecuencia de corte o límite superior f_2*** es la frecuencia mayor que la de resonancia, para la cual se obtiene una potencia mitad que la que suministra al circuito a la frecuencia de resonancia.

A su vez ***la frecuencia de corte o límite inferior f_1*** es la frecuencia menor que la de resonancia, para la cual se obtiene una potencia mitad que la que suministra al circuito a la frecuencia de resonancia.

Conociendo la frecuencia de resonancia, el ancho de banda y el factor de calidad se tiene:

$f_2 = f_0 + (\Delta f/2) = Q\,\Delta f + (\Delta f/2) = f_0 + (f_0/2Q)$

$f_1 = f_0 - (\Delta f/2) = Q\,\Delta f - (\Delta f/2) = f_0 + (f_0/2Q)$

También podemos decir que **las frecuencias de corte son aquellas para las cuales se produce un desfase entre la corriente y la tensión comprendido entre –45º** (intensidad en adelanto para la f_1) **y +45º** (intensidad en retraso para la f_2).

Se llama ***ancho de banda, anchura de banda, banda de paso, o banda pasante***, al número de ciclos a uno y otro lado de la frecuencia de resonancia comprendidos entre las frecuencias de corte superior e inferior.

También se denomina así a la diferencia de frecuencias, en las cuales la potencia disipada por el circuito es la mitad de la disipada a la frecuencia de resonancia por dicho circuito.
Se suele representar por $f_2 - f_1$, o bien por Δf siendo f_2 la frecuencia de corte superior, y f_1 la frecuencia de corte inferior, por lo que cabe una nueva definición ***de banda de paso, diciendo que es el número de frecuencias comprendido entre ambas frecuencias de corte.***

El ancho de banda vale

$\Delta f = f_0/Q = R/2\pi L$ (para frecuencias)

$\Delta\omega = \omega_0/Q = R/L$ (para pulsaciones)

Para hallar el ancho de banda gráficamente, una vez dibujada la curva de respuesta-frecuencia, se toma el valor 0,707 I_{max} (figura 6.20) y se traza una línea paralela al eje de abscisas o de frecuencias hasta que corte a la curva en los puntos A y B. Las perpendiculares trazadas desde ellos determinan las frecuencias de corte f_2 y f_1.

El ancho de banda (zona sombreada); es $f_2 - f_1$

17.1.7 Curva universal de resonancia

La curva universal de resonancia para el circuito serie es la representada en la figura 6.21.

Tiene por ecuación matemática $y = \dfrac{1}{\sqrt{1+4x^2}}$

donde la ordenada es el módulo de Y/Y_0 (admitancias), o I/I_0 (corrientes) o Z_0/Z (impedancias) y donde la Abscisa $x = Q_0\,\varepsilon$ (factor de calidad por la desintonía relativa) $= Q_0\,(\omega - \omega_0)/\omega_0$ o también a $\Delta\omega L/R$.

La curva es simétrica respecto del eje *y* que pasa por x = 0; esto es: en resonancia. El origen de coordenadas, punto 0, corresponde a un valor de

$$x = Q_0\,\varepsilon = Q_0\,(\omega - \omega_0)/\omega_0$$

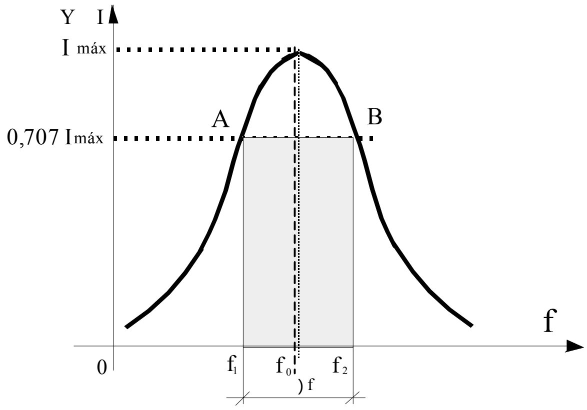


Figura 6.20

pero para la resonancia $\omega - \omega_0 = 0$; por tanto, x = 0.

La curva universal se suele representar en un entorno de x entre + 2 y - 2.

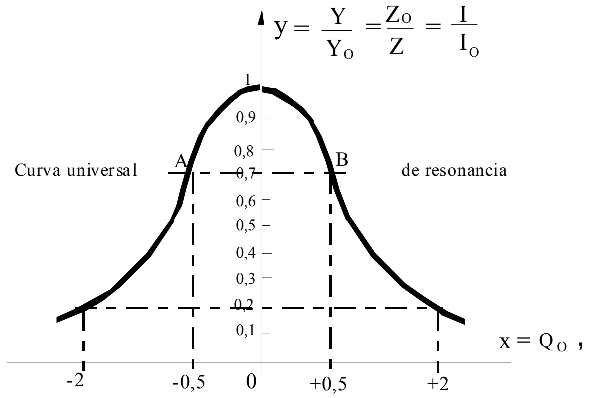


Figura 6.21

Consecuencia de la observación de la figura es que para un determinado valor de $x = Q_0\,\varepsilon$ cuanto mayor sea el coeficiente (o factor) de calidad, menor es la desintonía relativa, ε, y menor es el ancho de banda. Del mismo modo, para un determinado valor de ε, cuanto mayor sea el Q_0 mayor será *x*, por lo que "pasan" peor las frecuencias que correspondan a ε.

Por último, cuanto mayor sea el valor del Q_0, más selectivo es el circuito

El ancho de banda corresponde al entorno x = ±0,5 (puntos A y B, llamados puntos de media potencia).

En electrónica se considera que la banda de paso está definida a uno u otro lado de la frecuencia de resonancia por la pérdida de 3dB en el valor de la intensidad respecto de la de resonancia; en tal caso:

$$-3\ dB = 20 \log (I / I_0) \Rightarrow -3 / 20 = \log (I / I_0) \Rightarrow \text{anti log} (-3 / 20) = I / I_0 = 0{,}707$$

$$0{,}707 = \frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}\ de\, donde\, x = \pm 0{,}5$$

LLevando este valor de la ordenada a la ecuación de la curva universal de resonancia, tenemos que:

Para analizar todo lo tratado, veamos el siguiente ejemplo.
Sea el circuito de la figura 6.17 en que R = 100Ω, L = 2 mH y C = 80 pF. Apliquémosle una tensión

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{2*10^{-3}*80*10^{-12}}} = 398.089 Hz$$

alterna de 300 voltios y veamos qué ocurre.

La frecuencia de resonancia f_0 vale:

La corriente que circula por el circuito,
$I_0 = V/R = 300/100 = 3$ Amperios

Las reactancias inductiva y capacitiva son

$$X_L = X_C = 2\pi\, f\, L = 1/2\pi\, f\, C = 5.000\ \Omega$$

Las caídas de tensión que origina la corriente tanto en la bobina como en el condensador son:
$V_L = V_C = 5.000 \times 3 = 15.000$ voltios.

La ganancia en tensión es
Av = 15.000/300 = 50

El factor de calidad es
$Q = X_L / R = 5.000 / 100 = 50$

El ancho de banda vale
$\Delta f = f_2 - f_1 = f_0 / Q = 398.089 / 50 = 7.960$ Hertzios,

correspondiendo 7960/2 = 3.980 Hertzios a cada lado de la frecuencia de resonancia.

Las frecuencias de corte son:
$f_2 = 398.089 + 3.980 = 402.069$ Hertzios
$f_1 = 398.089 - 3.980 = 394.069$ Hertzios

17.1.8 Consecuencias del circuito a la frecuencia de resonancia.

a) Al tratarse de un circuito serie, y anularse las reactancias inductiva y capacitiva, el circuito presenta una impedancia resistiva pura, y ésta será la de la resistencia óhmica del circuito, que a su vez será mínima. O sea: $Z_0 = R$.

b) Como la impedancia es mínima, la intensidad de la corriente, que según la ley de Ohm generalizada vale I = V/Z, será máxima; es decir $I_0 = V/Z_0 = V/R$.

c) Para frecuencias superiores a la de resonancia, el circuito se comporta inductivamente, pues $X_L=2\pi\, fL$, y para frecuencias inferiores a la de resonancia, el circuito se comporta capacitivamente; pues $X_C = /2\pi\, f\, C$.

d) Ya hemos visto cómo la reactancia, a la frecuencia de resonancia, es nula y la impedancia total es solamente la de la resistencia óhmica, la cual puede ser, a su vez, la resistencia óhmica de la bobina, -circuito L-C con bobina real- por lo que si la bobina fuera ideal (resistencia nula) tendríamos en el circuito una corriente infinita.
En la practica esto es imposible, ya que es imposible anular la resistencia óhmica de la bobina; esta imposibilidad da lugar al concepto de factor de calidad y selectividad del circuito.

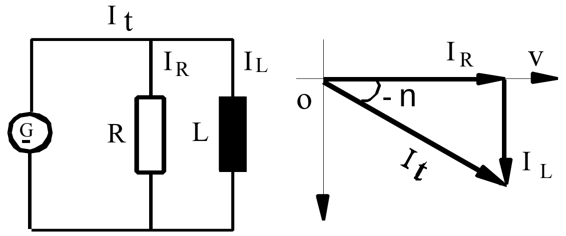
e) A pesar de que el circuito sea alimentado con una tensión pequeña, en los extremos de la bobina y del condensador podemos tener tensiones elevadas o muy elevadas, (éste es el fenómeno de la resonancia) o sea, mucha ganancia de tensión; sin embargo, a frecuencias distintas a la de resonancia las tensiones en la bobina y el condensador son despreciables.

CIRCUITOS R - L - C PARALELO

El análisis de los circuitos paralelo o derivados es más complicado que el de los circuitos serie. No obstante, al igual que los circuitos serie se resuelven por medio de las impedancias, los circuitos derivados se resuelven, generalmente, mediante las admitancias.

18 Circuito con resistencia y inductancia. Circuito R-L

Sea el circuito de la figura 6.22,a constituido por una resistencia y una bobina.



a) circuito b) triángulo de intensidades

Figura 6.22

Al aplicarle una tensión alterna senoidal, los dos componentes, resistencia y bobina, estarán sometidos a la misma tensión, por lo que cada uno de ellos será recorrido por una corriente senoidal diferente: por la resistencia circulará una corriente I_R que estará en fase con la tensión aplicada, y por la bobina circulará una corriente I_L que estará retrasada 90º respecto de la tensión. Ver figura 6.22,b).
La suma vectorial o geométrica de ambas corrientes (Ley de Kirchhoff) dará lugar a la corriente total I_t que recorre el circuito y que estará retrasada un ángulo φ.

Admitancia

Ya sabemos que la admitancia es la inversa de la impedancia. Por tanto (en forma compleja):

$$\vec{Y} = \vec{Y}_R + \vec{Y}_L = \frac{1}{R} - j\frac{1}{X_L} = \vec{G} - j\vec{B}$$

El módulo de la admitancia es:

$$|Y| = \sqrt{G^2 + B^2}$$

El argumento o ángulo $\varphi = \text{arc tg} \ - B/G$

Corrientes. Triángulo de corrientes

Antes quedó expuesto que la corriente total queda retrasada un ángulo φ con respecto de la tensión. Este valor queda descompuesto en dos componentes: una, I_R, en fase con la tensión y otra, I_L, retrasada 90º respecto de la anterior. (Ver figura 6.22,b).

La I_R o *corriente activa* vale:

$$I_R = It \cos(-\varphi) = V_{(0^o} / R_{(0^o} = V_{(0^o} / Y_{R\,(0^o}$$

La I_L o *corriente reactiva* vale:

$$I_L = It \operatorname{sen}(-\varphi) = V_{(0^o} / X_{L(90^o} = V_{(0^o} / Y_{L\,(-90^o}$$

La corriente total It, en forma compleja, vale:

$$\vec{I}_t = \vec{I}_R - j\vec{I}_L$$

El módulo de la It es:

$$|It| = \sqrt{I_R^{\,2} + I_L^{\,2}}$$

El argumento o ángulo de desfase es:

$$\varphi = \text{arc tg} - (I_L / I_R) = \text{arc tg} - (B/G) = -\varphi$$

El factor de potencia o coseno de fi es:

$$\cos\varphi = I_R / I_t$$

Como ejemplo se propone resolver un circuito R-L paralelo donde R = 1000Ω y L es tal que su reactancia inductiva X_L = 1.884Ω. El circuito se alimenta con una tensión de 110 voltios de c. a. senoidal.

Solución:

$Yt = Y_R + Y_L = 1 / 1.000 + (1 / 1.884j) =$
$1 / 1.000_{(0^o} + (1 / 1.884_{(90^o}) = 0{,}001 - 0{,}00053j$

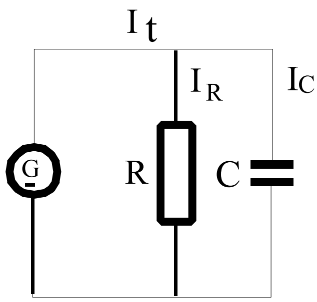
$\varphi = \text{arc tg} - (0{,}00053/0{,}001) = -27{,}92^o = -27^o\ 55'55''$

$|Y| = \sqrt{0{,}001^2 + 0{,}00053^2} = 0{,}00113\,mhos$

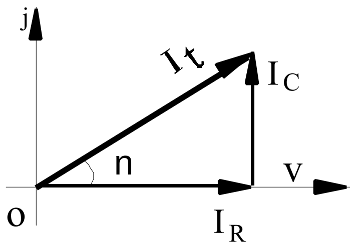
$Z = 1 / Yt = 1 / 0{,}00113_{(-27{,}92^o} = 884_{(27{,}92^o}\ \Omega$
$I_R = V\,Y_R = 110_{(0^o}\,0{,}001_{(0^o} = 0{,}11_{(0^o}\,A$
$I_L = V\,Y_L = 110_{(0^o}\,0{,}00053_{(-90^o} = 0{,}0583_{(-90^o}\,A$
$It = V\,Yt = 110_{(0^o}\,0{,}00113_{(-27{,}92^o} = 0{,}124_{(-27{,}92^o}A$

18 Circuito con resistencia y condensador. Circuito R-C

Sea el circuito de la figura 6.23,a formado por la resistencia pura R y el condensador C.



a) circuito



b) triángulo de intensidades

Figura 6.23

Al aplicar al circuito una tensión alterna senoidal de V voltios de valor eficaz y de frecuencia f en Hertzios, cada componente será recorrido por una corriente alterna senoidal de la misma frecuencia que la de la tensión de alimentación: por la resistencia circulará una corriente I_R que estará en fase con la tensión aplicada, y por el condensador circulará una corriente I_C 90º en adelanto respecto de la tensión. Figura 6.23,b).

La suma vectorial o geométrica de ambas corrientes (Ley de Kirchhoff) dará lugar a la corriente total I_t que recorre el circuito y que estará adelantada un ángulo φ .

Admitancia

La admitancia es la inversa de la impedancia. Por tanto (en forma compleja):

$$\vec{Y} = \vec{Y}_R + \vec{Y}_C = \frac{\vec{1}}{\vec{R}} + j\frac{\vec{1}}{\vec{X}_C} = \vec{G} + j\vec{B}$$

El módulo de la admitancia es:

$$|Y| = \sqrt{G^2 + B^2}$$

El argumento o ángulo φ = arc tg B/ G

Corrientes. Triángulo de corrientes

La corriente total queda adelantada un ángulo φ con respecto de la tensión. Este valor queda descompuesto en dos componentes: una, I_R, en fase con la tensión y otra, I_C, adelantada 90º respecto de la anterior. (Ver figura 6.23,b).

La I_R o *corriente activa* vale:

$$I_R = It \cos(\varphi) = V_{(0^\circ} / R_{(0^\circ} = V_{(0^\circ}\ Y_{R\,(0^\circ}$$

La I_C o *corriente reactiva* vale:

$$I_C = It \operatorname{sen}(\varphi) = V_{(0^\circ} / X_{C(-90^\circ} = V_{(0^\circ}\ Y_{C\,(90^\circ}$$

La corriente total It vale:

$$|It| = \sqrt{I_R^{\ 2} + I_C^{\ 2}}$$

El argumento o ángulo de desfase es:

$$\varphi = \text{rc tg } (I_C / I_R) = \text{arc tg } (B/G)$$

El factor de potencia o Cos φ = I_R / I_t

Como ejemplo se propone la resolución del siguiente ejercicio.

Sea una resistencia de 100 ohmios y un condensador de 16 microfaradios en paralelo. Se alimentan con una tensión de 200v/50Hz. Hallar:

a) la reactancia del condensador
b) la admitancia e impedancia total del circuito;
c) el ángulo de desfase;
d) coseno de φ;
e) las intensidades de corriente por el circuito.

Resolución:

a) $Xc = 1/ 2\,\pi\, f\, C = 199_{(-90^\circ}\,\Omega$

b) $Yt=Y_R+Y_C =1/100_{(0^\circ} +1/199_{(-90^\circ} =0{,}01+0{,}005j$

$$|Y| = \sqrt{0{,}01^2 + 0{,}005^2} = 0{,}011(_{26{,}56^\circ}\ mhos$$

$$Z = 1/Yt = 1/0{,}011_{(26{,}56^\circ} = 90{,}9_{(-26{,}56^\circ}\Omega$$

c) φ = arc tg (0,005/0,01)=26,56º = 26º,33´,54´´

d) Cos φ = 0,8944

e) $I_R = V\, Y_R = 200_{(0^\circ}\ 0{,}01_{(0^\circ} = 2_{(0^\circ}$ A

$I_L = V\, Y_C = 200_{(0^\circ}\ 0{,}005_{(90^\circ} = 1_{(90^\circ}$ A

$It = V\, Yt = 200_{(0^\circ}\ 0{,}011_{(26{,}56^\circ} =2{,}23_{(26{,}56^\circ}$ A

19 Circuito L-C. El circuito oscilante o circuito tanque

En general toda combinación L-C recibe el nombre de circuito tanque por su facultad de almacenar energía, especialmente cuando ambas reactancias aparecen concentradas solas, sin resistencia ni fuente de alimentación. También se conoce como circuito oscilante.

Sea el circuito de la figura 6.24. Si se coloca el conmutador en la posición 1, el condensador se cargará a la tensión de la fuente. Una vez cargado, al pasarlo a la posición 2, el condensador se descarga sobre la bobina, la cual es recorrida por una corriente que crea alrededor de ella un campo magnético donde almacena la energía entregada por el condensador.

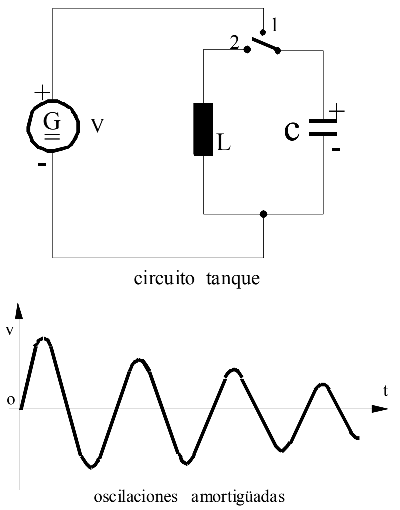


Figura 6.24

Una vez descargado el condensador (y almacenada toda su energía en la bobina), éste comienza de nuevo a cargarse a expensas de la bobina, originándose por el circuito una corriente en sentido contrario al de la descarga. Una vez cedida toda la energía de la bobina al condensador, éste vuelve nuevamente a descargarse sobre la bobina y así sucesivamente.

El resultado es la circulación, por el circuito, de una corriente oscilante o alterna. Si no hubiera pérdidas, sobre todo en la resistencia asociada de la bobina, en el circuito, las oscilaciones mantendrían su amplitud indefinidamente. Pero debido a las pérdidas, dicha corriente se va amortiguando poco a poco hasta desaparecer totalmente.Ver oscilograma.

La frecuencia de oscilación responde a la fórmula:

$$fo = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

Se trata de una frecuencia propia, llamada frecuencia de oscilación.

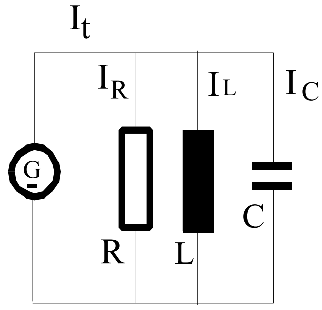
Observaciones.

a) Si se desea disminuir el factor de calidad Q del circuito para ensanchar el ancho de banda, es suficiente con colocar una resistencia en serie con la bobina. (Se puede poner variable para variar o controlar el ancho de banda a voluntad).

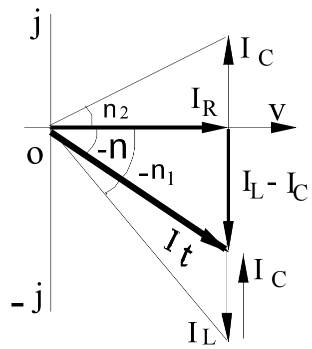
b) También se puede modificar el el factor de calidad Q colocando una resistencia en paralelo con el circuito tanque.

20 Circuito con resistencia bobina y condensador. Circuito R-L-C.

Sea el circuito de la figura 6.25,a constituido por una resistencia, una bobina y un condensador.



a) circuito



b) triángulo de intensidades

Figura 6.25

Al aplicarle una tensión alterna senoidal, los tres componentes estarán sometidos a la misma tensión, por lo que cada uno de ellos será recorrido por una corriente senoidal diferente: por la resistencia circulará una corriente I_R que estará en fase con la tensión aplicada, por la bobina circulará una corriente I_L que estará retrasada 90º respecto de la tensión y por el condensador circulará una corriente I_C 90º en adelanto respecto de la tensión. Ver figura 6.25,b).

La suma vectorial o geométrica de ambas corrientes (Ley de Kirchhoff) dará lugar a la corriente total I_t que recorre el circuito y que estará retrasada un ángulo φ si la I_L es mayor que la I_C como hemos supuesto en este caso; (al revés en caso contrario).

Admitancia

La admitancia total, en forma compleja, es:

$$\vec{Yt} = \vec{Y_R} + \vec{Y_L} + \vec{Y_C}$$

El módulo de la admitancia es:

$$|Y| = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{X_L} - \frac{1}{Xc}\right)^2}$$

Corrientes. Triángulo de corrientes

En la figura 6.25b se puede ver como la corriente total queda retrasada un ángulo φ con respecto de la tensión. Este valor queda descompuesto en dos componentes: una, I_R, en fase con la tensión, y otra, I_L - I_C, retrasada 90º, en este caso, respecto de la anterior.

La I_R o *corriente activa* vale:

$$I_R = It \cos(-\varphi) = V_{(0º} / R_{(0º} = V_{(0º}\, Y_{R\,(0º}$$

La I_L o *corriente reactiva inductiva*

$$I_L = V_{(0º} / X_{L(90º} = V_{(0º}\, Y_{L\,(-90º}$$

La I_C o *corriente reactiva capacitiva* es:

$$I_C = V_{(0º} / X_{C(-90º} = V_{(0º}\, Y_{C\,(90º}$$

La I_L - I_C o *corriente reactiva total* es:

$$I_L - I_C = It \operatorname{sen}(-\varphi)$$

La It o *corriente total* vale:

$$It = I_R / \cos(-\varphi) = V_{(0º}\, Y_{t\,(-\varphi º}$$

El módulo de la It es:

$$|It| = \sqrt{I_R{}^2 + B(I_L - I_C)^2}$$

El argumento o ángulo de desfase es:

φ = arc tg - (I_L- I_C)/I_R

El factor de potencia o coseno de fi es:

Cos φ = I_R / I_t

Como ejemplo se propone la resolución del siguiente ejercicio.

Sea una resistencia de 100 ohmios, un condensador de 16 μF y una bobina de 0,1 H conectados en paralelo (figura 6.25). Se alimentan con una tensión de 200v/50Hz. Hallar:

a) la admitancia e impedancia total del circuito;
b) el coseno de φ;
c) las intensidades de corriente por el circuito.

Solución:

a) $Yt = Y_R + Y_C - Y_L = 1/100_{(0º} + 1/199_{(-90º} - 1/31{,}4_{(90º}$
$= 0{,}01 + 0{,}005\,j - 0{,}0318j$ mhos
$Yt = 0{,}01 - 0{,}0268j$

Módulo:

$$|Yt| = \sqrt{0{,}01^2 + 0{,}0268^2} = 0{,}286\,mhos$$

Argumento:

φ = arc tg -(0,0268/0,01)= -69,53º

Impedancia Z = 1/Y = 34,96 $_{(69,53º}$Ω

b) Cos φ= Cos –69º 32´ 16´´ = 0,3497

c) $It = V_{(0º}\, Y_{t\,(-\varphi º} = 200_{(0º}\, 0{,}0286_{\,(-69{,}53º} = 5{,}72_{(-69{,}53º}A$
$I_R = V_{(0º}\, Y_{R\,(0º} = 200\ 0{,}01 = 2_{\,(0º}$ Amperios
$I_L = V_{(0º}\, Y_{L(-90º} = 200\ 0{,}0318 = 6{,}36_{(-90º}$ Amperios
$I_C = V_{(0º}\, Y_{C\,(90º} = 200\ 0{,}005 = 1_{(90º}$ Amperio
$I_L - I_C = 6{,}36 - 1 = 5{,}36_{(-90º}$ Amperios

21 Circuitos mixtos R-L-C

Si bien cada circuito R-L-C mixto presenta ciertas peculiaridades y características propias y, por tanto, su resolución se puede acometer de una u otra forma. Podemos decir, como norma general, que su resolución se facilita resolviendo primero los "paralelos" por admitancias y a continuación las "series" por impedancias.

Una vez resueltos los paralelos por admitancias, se buscan las impedancias (inversas de las admitancias) de cada paralelo que resultarán en serie con las "series". Después de esto ya resulta un circuito equivalente en serie que se resuelve cómodamente por impedancias.

Esta "norma" o "consejo" no es la única forma de resolverlos; pues existen circuitos en los que su resolución resulta más "fácil" por admitancias. Cada cual lo puede resolver como mejor lo comprenda y más sencillo le resulte.

A modo de ejemplo, ofrecemos el circuito de la figura 6.26, donde aportamos las soluciones.

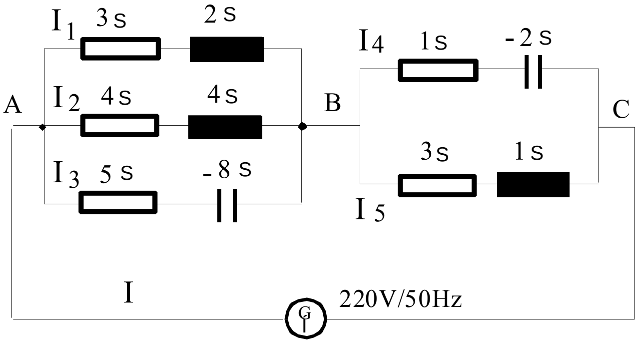


Figura 6.26

Solución:

$Y_1 = 0{,}230 - 0{,}154j$
$Y_2 = 0{,}125 - 0{,}125j$
$Y_3 = 0{,}056 + 0{,}09\,j$

$Y_{AB} = Y_1 + Y_2 + Y_3 = 0{,}411 - 0{,}189j$
$|Y_{AB}| = 0{,}453_{(-24{,}69^o}$ mhos
$Z_{AB} = 1/Y_{AB} = 1/\ 0{,}453_{(-24{,}69^o} = 2{,}20_{(24{,}69^o}\Omega$

$Y_4 = 0{,}2 + 0{,}4j$;
$Y_5 = 0{,}3 - 0{,}1j$;
$Y_{BC} = Y_4 + Y_5 = 0{,}5+0{,}3j \Rightarrow |Y_{BC}| = 0{,}583_{(30{,}96^o}$ mhos

$Z_{BC}=1/Y_{BC}=1{,}47-0{,}882j=1/\ 0{,}583_{(30{,}96^o} = 1{,}715_{(-30{,}96^o}\Omega$
$Zt = Z_{AC} = Z_{AB} + Z_{BC} = 2+ 0{,}923j +1{,}47 - 0{,}882j$
$= 3{,}47 + 0{,}041j \Rightarrow Zt = 3{,}47_{(0{,}67^o}\Omega$

$It = 220_{(0^o} /3{,}47_{(0{,}67^o} = 63{,}4_{(-0{,}67^o}$ A
$\cos \varphi = 0{,}9999$

$V_{AB} = Z_{AB}\ It = 2{,}20_{(24{,}69^o}\Omega\ 63{,}4_{(-0{,}67^o}A = 139_{(24{,}02^o}V$
$V_{BC} = Z_{BC}\ It = 1{,}715_{(-30{,}96^o}\Omega\ 63{,}4_{(-0{,}67^o}A= 08{,}7_{(-31{,}63^o}V$

$I_1 = V_{AB}\ Y_1= 139_{(24{,}02^o}V\ 0{,}253_{(-33{,}8^o} = 35{,}16_{(-9{,}78^o}V$
$I_2 = V_{AB}\ Y_2 = 139_{(24{,}02^o}V\ 0{,}14_{(-45^o} = 19{,}46_{(-20{,}98^o}V$
$I_3 = V_{AB}\ Y_3 = 139_{(24{,}02^o}V\ 0{,}064_{(58{,}11^o} = 8{,}9_{(82{,}12^o}V$
$I_4 = V_{BC}\ Y_4 = 108{,}7_{(-31{,}63^o}V\ 0{,}36_{(63{,}43^o} = 39{,}13_{(31{,}8^o}V$
$I_5 = V_{BC}\ Y_5 = 108{,}7_{(-31{,}63^o}V\ 0{,}19_{(-18{,}43^o} = 20{,}6_{(50^o}V$

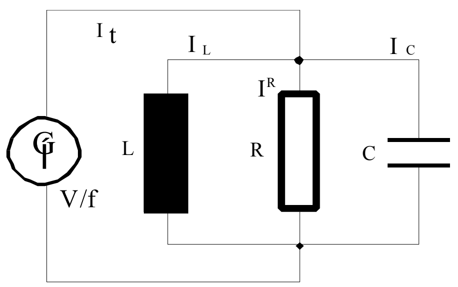


Figura 6. 27

22 Resonancia paralelo o resonancia de corriente

Se producirá en un circuito paralelo formado por RLC. También se llama resonancia de intensidad o resonancia de corriente.
Aunque la condición de resonancia es la misma que para el circuito serie, ya que la definición de resonancia es única (ocurre la resonancia cuando la tensión y la corriente están en fase), el funcionamiento de este circuito es diferente al serie.

Si en el circuito serie se cumplía que, a la frecuencia de resonancia, la parte compleja de la impedancia debía ser nula, ***en el paralelo, se cumple que la parte compleja o susceptancia de la admitancia debe ser nula;***

Así como en resonancia serie se producen elevadas tensiones en los extremos de la bobina y el condensador, dependiendo del factor de calidad Q aún alimentando el circuito con una tensión pequeña, en resonancia paralelo se pueden originar valores elevados de la intensidad que circula por la bobina y por el condensador aún cuando la intensidad que recorra el circuito tenga un valor reducido.

Sea el circuito de la figura 6.27 constituido por una resistencia, una bobina y un condensador en paralelo. En él tenemos que la admitancia total es:

$$\vec{Yt} = \vec{Y_R} + \vec{Y_L} + \vec{Y_C}$$

Para que exista resonancia, pues, debe ser nula la componente compleja o susceptancia; por tanto:

$$\mathbf{2\,\pi f\,C = 1/2\,\pi f\,L}$$

22.1 Frecuencia de resonancia

Despejando, tenemos:

$$fo = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

22.2 Corrientes parciales y corriente total del circuito en resonancia.

Veamos las corrientes parciales y la total que circulan por el circuito.
Corriente por la resistencia: $I_R = V/\ R$
Corriente por la bobina: $I_L = -jV/X_L=-jV\ /L\omega_0$
Corriente por el condensador: $I_C= +jV/X_C = +jVC\omega_0$

La intensidad que circula por la resistencia está en fase con la total; la que circula por la bobina está 90º en retardo con la intensidad total, y la que circula por el condensador va 90º en adelanto sobre la corriente total.

La intensidad total que circula por el circuito a la frecuencia de resonancia es, aplicando al circuito la Ley de Kirchhoff:

$$I_t = I_R + I_L + I_C = VY_0 = V/R$$

lo que nos pone de manifiesto que la intensidad de alimentación de un circuito resonante paralelo ideal es igual a la corriente que circula por la resistencia.

22.3 Distribución de energías y potencias en el circuito

La energía almacenada por la bobina es:

$$\varepsilon_L = \frac{1}{2} L I^2$$

La energía almacenada por el condensador es

$$\varepsilon_C = \frac{1}{2} CV^2$$

El comportamiento del circuito de cara a las energías, ocurre lo que en el circuito serie: "la energía que pierde el condensador es, en todo instante, igual a la que gana la bobina y recíprocamente".

Dichas potencias son: La $W_R = R_{(0^o} I^2$
La $W_L = X_{L0\,(90^o} I^2$
La $W_C = X_{C0\,(-90^o} I^2$

De aquí se desprende que "en cualquier instante, la suma de las potencias absorbidas por la bobina y el condensador de un circuito resonante paralelo es cero". O lo que es lo mismo "la potencia absorbida por la bobina es igual, en cualquier instante, a la cedida por el condensador y recíprocamente".

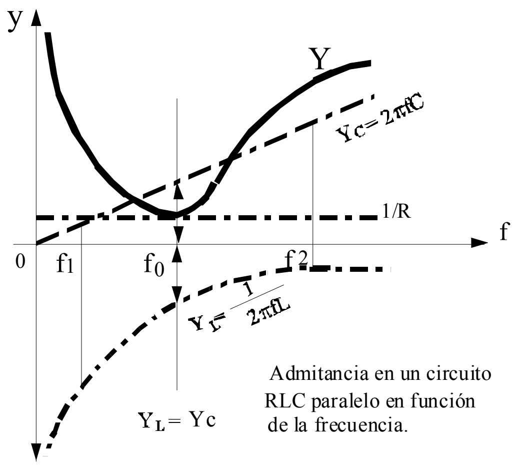


Figura 6.28

22.4 Curva de respuesta en frecuencia

En la figura 6.28 hemos representado las curvas de las distintas admitancias así como el módulo de la admitancia total en función de la frecuencia. En ella vemos que la G o 1/R es siempre la misma; ya que su valor es independiente de la frecuencia.

La Y_C crece linealmente con la frecuencia y en definitiva con la pulsación.

La Y_L también crece exponencialmente con la frecuencia desde "menos infinito" (para cero hertzios) hasta llegar a valor cero para una frecuencia infinita.

Asimismo se puede observar cómo ***el módulo de la admitancia total va decreciendo hasta el valor propio de la conductancia (cosa que sucede para la frecuencia de resonancia) para volver luego a crecer rápidamente.***

En la figura 6.29 tenemos la curva de la impedancia en función de la frecuencia.

Observemos que es máxima a la frecuencia de resonancia. Como la inversa de la impedancia es la admitancia, ésta (Y = 1/Z) será mínima a la frecuencia o pulsación de resonancia.

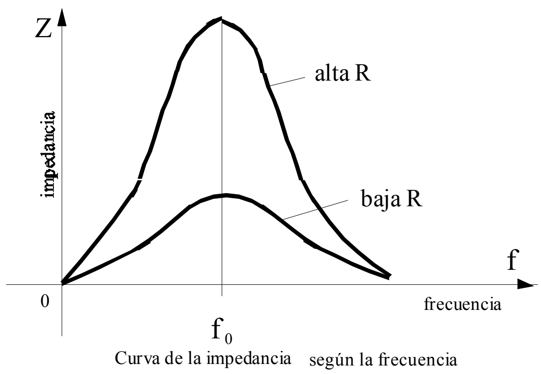


Figura 6.29

22.5 Coeficiente o factor de calidad

Se denomina coeficiente o factor de calidad o de sobreintensidad a la frecuencia de resonancia de un circuito (o de una bobina), al producto de la pulsación por el cociente entre la máxima energía almacenada y la potencia media disipada.

Se designa por Q y vale: $\mathbf{Q = R/L\omega}$

Para la frecuencia de resonancia será, siendo ω_0 la pulsación de resonancia:

$$\mathbf{Q_0 = R/L\omega_0 = \omega_0 CR}$$

Se suele tomar un valor mayor que 10.

También es igual a $\mathbf{I_C/ = I_L/I}$

22.6 Frecuencias de corte y ancho de banda

Las frecuencias de corte también se conocen como ***frecuencias límite*. Son aquellas para las cuales la intensidad de corriente es 0,707 -1/ 2- veces (70,7%) la corriente a la frecuencia de resonancia; o bien aquellas para las cuales la potencia se reduce a la mitad de la de resonancia** (puntos de media potencia).

En efecto: si la potencia en resonancia es $W_0 = R\,I_0^2$ y la corriente cae a 0,707 I_0, tenemos que

$$W_{f2} = W_{f1} = R\cdot(0{,}707\ I_0)^2 = 0{,}5\ RI_0^2$$

que, es la mitad de la potencia que en resonancia.

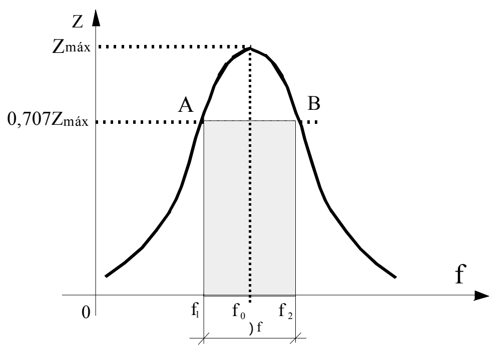


Figura 6.30

O de otra forma: aquellas que cumplen la condición

$$\mathbf{I_{fo} / I_{f2} = I_{f0} / I_{f1} = 0{,}707}$$

Así, pues, la definición de las frecuencias de corte o frecuencias límite es la misma que para el caso de la resonancia serie.

Conociendo la frecuencia de resonancia y el ancho de banda se tiene:

$$\mathbf{f_2 = f_0 + (\Delta f / 2)}$$
$$\mathbf{f_1 = f_0 - (\Delta f / 2)}$$

Se llama ancho de banda, anchura de banda, banda de paso, o banda pasante, al número de ciclos a uno y otro lado de la frecuencia de resonancia comprendidos entre las frecuencias de corte superior e inferior.

También se denomina así a **la diferencia de frecuencias, en las cuales la potencia disipada por el circuito es la mitad de la disipada a la frecuencia de resonancia por dicho circuito.**
Se suele representar por $\mathbf{f_2 - f_1}$, o bien por $\mathbf{\Delta f}$ siendo f_2 la frecuencia de corte superior, y f_1 la frecuencia de corte inferior, por lo que cabe una nueva definición de banda de paso, diciendo que **es el número de frecuencias comprendido entre ambas frecuencias de corte.**

El ancho de banda vale: $\mathbf{\Delta f = f_0 / Q}$

Para hallar el ancho de banda gráficamente, se dibuja la curva de respuesta-frecuencia (figura 3.9), se toma el valor 0,707 Z_{max} y se traza una línea paralela al eje de frecuencias hasta que corte a la curva en los puntos A y B. Las perpendiculares trazadas desde ellos determinan las frecuencias de corte f_2 y f_1 y el ancho de banda (zona sombreada).

22.7 Curva universal de resonancia

La curva universal de resonancia es la misma que para la resonancia serie, la cual se representó anteriormente.

23 Consecuencias del circuito a la frecuencia de resonancia.

a) Al tratarse de un circuito paralelo, y anularse la parte compleja de la admitancia, el circuito presenta una conductancia pura, y la única resistencia que presenta es la inversa de la resistencia R. Por contra, la impedancia es máxima.

b) Como la admitancia es mínima a la frecuencia de resonancia, la corriente ($I_0 = VY_0$) también será mínima.

c) Para frecuencias superiores a la de resonancia, el circuito se comporta capacitivamente; lo contrario ocurre para frecuencias inferiores a la frecuencia de resonancia: el circuito se comporta inductivamente.

d) Para la frecuencia de resonancia las intensidades que circulan por la bobina y por el condensador son Q_0 veces la intensidad de alimentación del circuito.

<u>OBSERVACIÓN IMPORTANTE.</u>

EL CIRCUITO ANALIZADO ES SÓLO TEÓRICO, PUES EN LA PRÁCTICA LA RAMA DE LA BOBINA SIEMPRE TIENE UNA RESISTENCIA (LA ÓHMICA PROPIA DE LA BOBINA). POR ELLO, EL CIRCUITO MÁS SIMPLE QUE REALMENTE SE PRESENTA PARA ANALIZAR CONSTA DE DOS RAMAS PARALELAS: UNA <u>FORMADA POR LA BOBINA Y SU RESISTENCIA ASOCIADA</u> (CIRCUITO R-L) Y <u>LA OTRA COMPUESTA POR UN CONDENSADOR</u> (como el de la figura 6.31).

Sea el circuito de la figura 631. Vamos a analizarlo.
Datos: R = 5 ; L = 100mH; C = 160μF; V = 5V

Resolución:
Las admitancias son: $Y_{RL} = 1/(R + jL\,\omega)$
$Y_C = j\,C\,\omega$
Sumando las admitancias y operando, tenemos que, aproximadamente:

$$Yt = C/L\ [R + j\ (L\,\omega - (1/C\,\omega)\,)]$$

La pulsación de resonancia vale:

$\omega_0 = 1/ \sqrt{LC} = 250$ rad/sg

Frecuencia de resonancia:

$f_0 = \omega_0 /2 = 250/ 6,28 = 39,8 \quad 40$ Hertzios

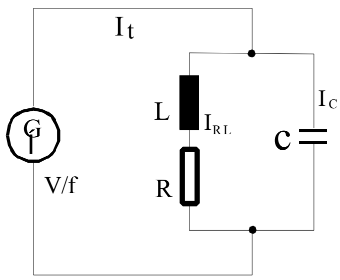
Factor de calidad $Q_0 = L\ \omega /R = 0,1\ 250/ 5 = 5$

Admitancia total en resonancia

$Yt = CR/L = 160\ 10^{-6}\ 5/ 0,1 = 0,008$ siemens

Corriente por ambas ramas: $I_{RL} = V \quad Y_{RL}$

$$I_R = I_C = \frac{5}{\sqrt{5^2 + 0,1^2}} \approx 40Hz$$



circuito R - L - C

Figura 6.31

Ancho de banda, $\Delta f = f_0/Q = 39,8/ 5 = 8$Hz

Frecuencia de corte inferior,

$f_1 = f_0 - (\Delta f/ 2) = 40 - 4 = 36$ Hz

Frecuencia de corte superior,

$f_2 = f_0 + (\Delta f /2) = 40 + 4 = 44$ Hz.

24 Aplicaciones de los circuitos resonantes

Algunas de las principales aplicaciones de los circuitos resonantes son:

a) Sintonizadores de antena para receptores y emisores.
b) Para acoplo de interetapas de amplificadores.
c) Para seleccionar frecuencias.
d) En demoduladores o detectores.
e) En los circuitos osciladores.
f) En generadores de audio y radiofrecuencias.
g) En selectores de canales (de frecuencias) en radio, TV, etc.
h) Como adaptadores de impedancias.
i) En transmisores, ya que transmiten libremente algunas frecuencias e impiden, en alto grado, el paso de otras.
j) En general, en cualquier tipo de circuito selectivo como los filtros.

EJERCICIOS DE APLICACIÓN. (Circuitos R-L-C)

1.- Hallar la energía almacenada en una bobina de 20 mH cuando es recorrida por una corriente de 2 amperios.

Solución: $W = LI^2 / 2 = 0{,}04$ Julios.

2.- Un condensador se carga a 60 voltios, desarrollando una energía de 4.000 julios. Hallar la carga adquirida.

Solución: $Q = 2\ W/V = 133{,}33$ Culombios.

3.- Una bobina de 50mH y una resistencia de 200 Ω en serie se conectan a una red de c a de 125v/50Hz. Hallar la Z total, la I total, el cos φ y la caída de tensión en cada uno de los elementos.

Solución: $Z_t = 200{,}6\ \Omega$; $I = 0{,}623A$; $Cos\ \varphi = 0{,}9970$
$V_R = 124{,}6v$; $V_L = 9{,}78V$

4.- Un generador de c a de 100v alimenta una resistencia de 30 ohmios y una bobina cuya X_L = 40 ohmios conectadas en serie. Calcular la impedancia total, la intensidad del circuito, y el ángulo φ.

Solución: $Z = 50\ \Omega$; $I = 2A$; $\varphi = 53^o\ 8'$

5.- .Que resistencia ha de conectarse en serie con una bobina de 0,5 Henrios, si con una tensión alterna senoidal de 1 Khz aplicada debe producir la misma caída de tensión en la bobina que en la resistencia?

Solución: R = 3.140 ohmios

6.- Una resistencia de 5 Ω y una bobina de 43 mH en serie se alimentan con una c a cuya frecuencia es de 60 Hz, produciendo una corriente eficaz en el circuito de 8 mA. .Cuál es el valor de la tensión aplicada?

Solución: V = 136 mV

7.- Una resistencia de 8 ohmios, una L = 40mH y una C = 485,5 μF en serie, se alimentan a 220v/50Hz. Hallar el valor de la corriente que recorre el circuito.

Solución: I = 22A;

8.- Un circuito serie formado por una resistencia de 10 Ω y un condensador de 480 μF se alimenta con una tensión alterna senoidal de 220V/50Hz. Hallar la impedancia del circuito, en módulo y argumento; la corriente eficaz por el circuito y su desfase respecto de la tensión; la caída de tensión en la resistencia y el condensador; el factor de potencia y las potencias del circuito.

Solución: $Z = 12\Omega_{(-33^o, 33', 48''} = 12\ \Omega_{(-0,585\ radianes}$;
$I_{ef} = 18{,}33A_{(33^o,33',48''}$;
$V_C = I_{ef}\ X_C = 18{,}33A_{(33ı,33',48''}\ x6{,}63_{(-90^o} = 121{,}5V_{(-56^o,26',12''}$
$V_R = 183{,}3\ V_{(33^o,33',48''}$; $Cos\ \varphi = -\ 0{,}83$;
Pap = 4.032,6 VA;
Pac = 3.347 W;
Preac = -2.218VAR

9.- Una bobina tiene una resistencia óhmica de 10 Ω. Su reactancia inductiva es de 8 Ω. Si la conectamos a una red de 60 voltios, hallar la intensidad del circuito y el ángulo de desfase entre la tensión aplicada y la corriente.

Solución: $I = 4{,}68\ A$; $\varphi = 38^o{,}44'$

10.- Un circuito serie está formado por 4 resistencias de 4, 2, 1 y 1 ohmio respectivamente; por tres bobinas cuyas reactancias son 3, 5 y 2 ohmios respectivamente; y por dos condensadores de 2 ohmios de reactancia capacitiva cada uno. Si se conecta a 220v/50Hz, qué corriente circula por el circuito?.

Solución: $I = 22_{(36^o52'11''}$Amperios

11.- Una R = 10 ohmios y una bombilla cuya X_L = 8 ohmios se conectan en paralelo a 125voltios de c a. Hallar la impedancia total del circuito, así como la intensidad que circula por cada rama.

Solución: Z = 6,25 ohmios; I = 20A.

12. Una bobina de 1H y una R = 400Ω en paralelo, se alimentan a 220V/50Hz. Hallar las admitancias y las corrientes.

Solución: $Y_R = 0{,}0025_{(0^o}$; $Y_L = 0{,}0031_{(-90^o}$;
$Yt = 0{,}004_{(-51^o\ 6'56''}$
$I_R = 0{,}55_{(0^o}A$; $I_L = 0{,}682_{(-90^o}A$; $It = 0{,}88A_{(-51^o\ 6'56''}$

Problemas propuestos (Recopilación)

13.-¸Qué corriente atraviesa un condensador de 16 μF que está sometido a una tensión de 200V/100Hz?.

14.- En un ciruito hay conectadas en serie una resistencia de 20Ω y una autoinducción alimentadas con una tensión alterna senoidal de 120V/50Hz. Hallar el coeficiente de autoinducción L y el coseno de φ si la corriente que circula por el circuito es de 2A.

15.-¸Qué capacidad ha de conectarse en serie con una R = 4K si la caída de tensión en la resistencia debe ser 10 veces la caída de tensión en el condensador. La frecuencia de la tensión aplicada es de 100 Hz.

16.- Una lámpara de incandescencia consume 70 mA. Se conecta, en serie, con un condensador de 0,5 μF a una red de corriente alterna de 50V/50Hz. Hallar la impedancia total del circuito, así como la corriente que lo recorre.

17.- Una R =30 Ω y una L = 160 mH en serie se conectan a 200v/40 Hz. Hallar: la reactancia inductiva, X_L; la impedancia total, Z; I; V_R y V_L.

18.- Una R = 10 Ω, una L = 0,5 H y un condensador de 20 μF en serie,¸qué impedancia presentan?.

19.- Hallar las potencias activa, reactiva y aparente de un circuito formado por una bobina de 0,5 Henrios y una resistencia de 1.000 Ω conectadas en serie y alimentadas a 100v/200Hz.

20.- Una R = 10 Ω, una L = 160 mH y un condensador de 50 μF en serie se alimentan a 206v/40Hz. Hallar: Zt e It.

21.- Una R = 14Ω, una L = 10H y un C = 0,25 μF en serie se alimentan a 182v/100Hz. Hallar Z, I, V_R, V_L, Vc, Pac, Preac y Pap.

22.- Una R = 14 Ω, una L = 10 mH y un condensador de 0,25 μF en serie se alimentan con una tensión alterna senoidal de 182v/100Hz. Hallar: Zt, It, V_L , Vc, V_R , Pac, Preac y Pap.

23.- Una R = 4 Ω, una L cuya X_L= 20 Ω y un condensador cuya Xc = 15 Ω se conectan en serie a una tensión de 128v. Hallar: Zt, It, V_L , Vc, Vr, Pac, Preac y Pap. También el cos φ y el ángulo φ.

24.- Un circuito R-L-C serie está formado por una R de 4,9 Ω, una bobina cuya X_L = 5,66 Ω y un condensador cuya Xc = 4,66 Ω. Se alimenta con una tensión alterna senoidal de 200v/50Hz. Hallar Zt; It; V_R; V_L; Vc; Pac; Preac; Pap y cos φ.

25.- Una R = 50 Ω, una L = 12 mH y un condensador de 500 μF en serie se conectan a 220v/50 Hz. Hallar Zt, cos φ, el ángulo φ , V_R, V_L, Vc, P_{ac}, P_{reac}, y P_{ap} .

26.- Una R = 4 Ω, una bobina cuya X_L = 20 Ω, y un condensador cuya X_C = 15 Ω en serie se conectan a 128v. Hallar Zt, cos φ, el ángulo φ, V_R, V_L, Vc, P_{ac}, P_{reac}, y P_{ap} .

27.- Se conectan una resistencia de 80 KΩ y una bobina de 5H en paralelo. Hallar la tensión (y la frecuencia) que hay que aplicarle para que la corriente que circule por la bobina sea igual a la que circule por la bobina sea igual a la que circule por la resistencia

28 ¿Cuál es la autoinducción de una bobina cuya R es de 4Ω si para una frecuencia de 6.369,4 Hz tiene un factor de calidad Q = 20?

Solución L = 2 mH

EJERCICIOS DE APLICACIÓN. Resonancia

1.- Una R de 8 Ω, una L = 40 mH y un C = 485,5 μF en serie, ¿a qué frecuencia resuenan?.
Solución: fo = 36Hz

2.- Una L = 20 mH(R_L = 1 Ω) y un condensador de 25 μF en serie, ¿a qué frecuencia resuenan?. ¿Cuál es su ancho de banda?. ¿Y sus frecuencias de corte?.

Solución: $Q = X_{Lo}/R_L = 28,26$; $\Delta f = foQ = 225/28,26 = 8Hz$
$fo = 225Hz$; $f_1 = fo - \Delta f/2 = 221Hz$; $f_2 = fo + \Delta f/2 = 229Hz$

3.- Hallar la fo de una bobina de 10 mH y un condensador de 25μF. *Solución: fo = 318,47 Hz*

4.- Idem para una L = 10 mH y un C = 100μF.
Solución: fo = 159,2 Hz

5.- Idem para una L = 0,5 mH y un C = 47KpF.
Solución: fo = 32.851,5 Hz

6.- Mediante un circuito (circuito L-C) queremos sintonizar una emisora que transmite a 2.000 KHz. La capacidad de que disponemos es de 35 pF. ¿Cuál debe ser el valor de la bobina? *Solución: L = 180 μH*

7.- Un condensador de 400μF y una bobina de 50 mH (R_L = 2 Ω), a qué frecuencia resuenan?. Determinar el Q de la bobina, así como el ancho de banda y las frecuencias de corte.
Solución: $f_0 = 35,6$ Hz; $Q = 5,58$; $\Delta f = 6,38$ Hz;
$f_1 = 32,4$ Hz ; $f_2 = 38,8$ Hz.

8.- Un circuito formado por una L = 20 mH (R_L = 50 Ω) y un condensador de capacidad desconocida en serie, deben resonar a 11.260 Hz. Hallar el valor del condensador, el ancho de banda y sus frecuencias de corte f_1 y f_2.
Solución: C = 10 KpF; Δf = 400Hz;
f_1 = 11.060Hz; f_2 = 11.460Hz

9.- Una L = 4 mH (R_L =14,5 Ω) y una C=36 nF en serie se alimentan a 200v/50Hz. Hallar f_0; Q; f ; f_1 y f_2.
Solución: f_0 = 13.270Hz; Q = 23; Δf = 577Hz;
f_1 = 12.981,5Hz; f_2 = 13.558,5Hz

10.- Una L = 10 mH cuya R_L = 20Ω y un C= 10KpF en serie, a qué frecuencia resuenan?. ¿Cuál es su ancho de banda; y sus frecuencias de corte?.
Solución: f_0 = 15.923,5Hz; Δf = 318Hz;
f_1 = 15.764Hz; f_2 = 16.082Hz

11.- El factor de calidad, Q, de una bobina es 15 y resuena a 9.000Hz. Hallar el ancho de banda y las frecuencias de corte f_1 y f_2.
Solución: Δf = 600Hz; f_1 = 8.700Hz; f_2 = 9.300Hz

12.- Un circuito consta de dos ramas paralelas. La impedancia de una es 8 + 6j, y la de la otra 8,34-j/Cω. Calcular el valor de C para que resuene a 5 K Hz
Solución: C = 3,8 μF.

EJERCICIOS PROPUESTOS (Recopilación)

13.- Una R = 10Ω , una L = 0,5 H y un condensador de 20 μF en serie, ¿qué f_0 tienen?

14.- Se tiene una R = 10 Ω , una L = 160 mH y un C de 50 μF en serie. Hallar fo.

15.- Una R = 14 Ω, una L = 10 mH y un condensador de 0,25 μF en serie se alimentan con una tensión alterna senoidal de 182v/ 100Hz. ¿A qué frecuencia resuenan?

16.- Una R = 4 Ω , una bobina cuya X_L = 20 Ω , y un condensador cuya X_C = 15 Ω en serie se conectan a 120v/50Hz. Hallar fo. *(ojo, hay que calcular L y C)*

17.- Una bobina de 10H, cuya R = 20 Ω , y un condensador de 1 KpF, a qué frecuencia resuenan?. Hallar el ancho de banda y las frecuencias de corte f_1 y f_2.

18.- Un condensador de 10 KpF y una bobina de 20 mH (R =50 Ω) se conectan a 100v/50Hz. Hallar la frecuencia de resonancia, fo; su ancho de banda, y las frecuencias de corte f_2 y f_1.

19.- Un circuito serie formado por una R = 20Ω , una L =10 mH y un condensador, oscilan a 3.000 Hz. Hallar la capacidad del condensador así como las frecuencias de corte y el ancho de banda.

20.- Una L = 40mH (R_L = 5,02 Ω) y un C = 16 μF en serie, ¿a qué frecuencia resuenan?. Hallar el ancho de banda y las frecuencias de corte superior e inferior.

21.- Una L = 200mH (R_L = 10 Ω) y un C = 25μF en serie, a qué frecuencia resuenan?. Cuál es su ancho de banda? y sus frecuencias de corte f_1 y f_2? Hallar el Q y la pulsación de resonancia.

22.- Una L = 10H (R_L = 20Ω) y un C = 1 KpF en serie, a qué frecuencia resuenan?. ¿Cuál es su ancho de banda? y sus frecuencias de corte f_1 y f_2? Hallar el Q y la pulsación de resonancia.

LOS FILTROS PASIVOS

Introducción.

Se conocen por el nombre genérico de **filtros** a aquellos circuitos electrónicos que dejan pasar a su través una cierta gama de frecuencias de una corriente alterna multifrecuencia, rechazando las demás.

Los filtros pueden clasificarse:

a) según los componentes que lo configuran, en **filtros pasivos y filtros activos.**

Los filtros pasivos están constituidos solamente a base de resistencias, bobinas y condensadores. Por el contrario los filtros activos lo están con resistencias, condensadores y, además, elementos activos como transistores, C.I., etc.

b) según las frecuencias que dejan pasar:

- **filtros pasa-bajo,**
- **filtros pasa-alto,**
- **filtros pasa-banda y**
- **filtros elimina-banda.**

los filtros <u>pasa-bajo</u> solo dejan pasar ***las frecuencias inferiores a una determinada***, llamada de corte.
los filtros <u>pasa-alto</u> sólo dejan pasar ***las frecuencias superiores a una determinada***, llamada de corte.
los filtros <u>pasa-banda</u> solo dejan pasar ***una banda de frecuencias determinada.***
los filtros <u>elimina-banda</u> dejan pasar cualquier número de frecuencias ***excepto una banda determinada.***

CONCEPTOS PREVIOS

25 Frecuencia de resonancia o frecuencia central

Es la frecuencia para la cual las reactancias inductiva y capacitiva son iguales.

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \qquad [1]$$

26 Frecuencias de corte (f_C)

Son las frecuencias para las cuales se produce una atenuación de 3 dB en tensión, corriente o potencia; o sea: *la tensión o la corriente descienden hasta el 70,7% (1/√2) de las correspondientes a la frecuencia de resonancia; la potencia se reduce a la mitad*. Como consecuencia las ganancias en tensión y en corriente caen al 70,7% de las ganancias en tensión o en corriente a la frecuencia de resonancia o frecuencia central. Así mismo la ganancia en potencia se reduce a la mitad. Existen dos frecuencias de corte: la **inferior** y la **superior**.

La ganancia a las frecuencias de corte son las siguientes:

$$AVf_C = 0{,}707\ AVf_0\ ;$$
$$20 \log (AVf_C / AVf_0) = -3\ dB$$

$$AIf_C = 0{,}707\ AIf_0\ ;$$
$$20 \log (AIf_C / AIf_0) = -3\ dB$$

$$AWf_C = 0{,}50\ AWf_0\ ;$$
$$10 \log (AWf_C / AWf_0) = -3\ dB$$

27 Ancho de banda o banda pasante

Se define como la diferencia entre las frecuencias de corte superior e inferior.

28 Selectividad o calidad

Para una misma frecuencia de resonancia o central, varios circuitos o filtros pueden comportarse de manera diferente según su ancho de banda. Aquel cuyo ancho de banda sea inferior se dice que es más selectivo, que es de "mejor calidad", y dejará pasar menos frecuencias que aquel o aquellos que posean un menor factor de calidad.

El factor de calidad se representa por **Q** y vale:

$$Q = \frac{frecuencia\ de\ resonancia}{ancho\ de\ banda} = \frac{f_0}{\Delta f} \qquad [2]$$

29 Octava.

Es el intervalo entre dos frecuencias, siendo una del doble valor que la otra.

Así, se dice que dos frecuencias están separadas una octava si $\mathbf{f_2 / f_1 = 2}$.

30 Orden de un filtro

El orden de un filtro viene determinado por el número de células R-C existentes en el mismo. Para un filtro de orden 2 hace falta una célula, para uno de orden 4 hacen falta 2 células, etc.

31 Pendiente

Es la ***pendiente*** de bajada o subida de la curva del filtro. Depende del orden del mismo. Si suponemos un filtro de orden N, la pendiente es aproximadamente de 6 . N dB/octava; esto es: su curva cae en 6 . N dB cada vez que la frecuencia se duplica.

FILTROS PASIVOS

32 Filtros pasa-bajo

Ya sabemos que los filtros pasa-bajo son los que solo dejan pasar las corrientes cuyas frecuencias son inferiores a una frecuencia determinada denominada frecuencia de corte.

El circuito o montaje más sencillo está formado por una resistencia en serie con un condensador como se indica en la figura 6.32.

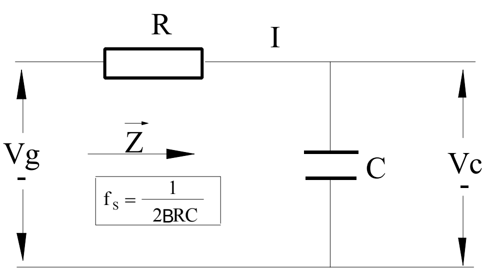


Figura 6.32. Filtro pasa-bajo R-C

Las frecuencias altas se derivan por el condensador, ya que su impedancia (reactancia capacitiva) es muy pequeña ($\mathbf{X_C = 1 / 2\pi fC}$), mientras que las bajas, se quedan en él.

La impedancia total que ofrece el circuito es:

$$Z = \sqrt{R^2 + Xc^2} = \sqrt{R^2 + \frac{1}{(1/2\pi fC)^2}} \qquad [3]$$

Supongamos que Vg sea la señal senoidal de frecuencia f que se aplica al circuito y Vc la tensión de la señal obtenida a la salida (en el condensador).

Tendremos que: **Vc = I · Xc**
Vg = I · Z

Dividiendo ambas expresiones, se tiene:

$$\frac{Vc}{Vg} = \frac{Xc}{R^2 + X^2} = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi f_s RC)^2}} \qquad [4]$$

siendo f la frecuencia de corte del filtro; en este caso **fs**. O sea, que para unos valores fijos de R, C y Vg, variando la frecuencia de Vg, iremos obteniendo los distintos valores de la tensión de salida Vc. Dicha tensión varía en la forma de la figura 6.33.

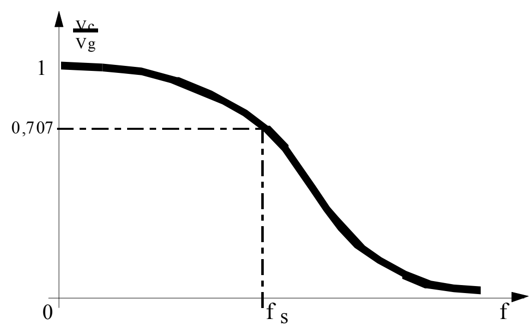


Figura 6.33. Respuesta en frecuencia

<u>FRECUENCIA DE CORTE:</u>

La frecuencia de corte es aquella para la cual la reactancia capacitiva es igual a la resistencia. Se define como frecuencia de corte (superior en este caso) f_S como aquella frecuencia para la cual la tensión de salida Vc es 0,707 (70,7%) de la tensión

de entrada Vg; o sea: **Vc/ Vg = 1/√2 = 0,707.**
De esta fórmula y de la [4], se deduce que $2\pi f_s RC = 1$, por lo que:

$$\boxed{fs = 1/\ 2\ \pi\ RC} \qquad [5]$$

Expresión que nos da la frecuencia de corte del filtro en función de los valores de R y de C..

De la fórmula [5] tenemos que: $2\pi RC = 1/f_S$ y que $(2\pi RC)^2 = 1/\ f_S^2$

Si sustituimos $(2\ \pi RC)^2 = 1/\ f_S^2$ en la expresión [4], tenemos que:

$$\frac{Vc}{Vg} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(f/f_s\right)^2}} \qquad [6]$$

que es la expresión matemática de la respuesta en frecuencia del **filtro pasa-bajo**.

Para la frecuencia de corte, $f = f_S$ y a medida que f aumenta, la salida Vc se ve más atenuada. Al contrario, a medida que f va disminuyendo, la salida Vc va aumentando, teniendo el máximo para f = 0 Hz.

En consecuencia, este circuito atenúa las señales cuyas frecuencias sean superiores a la de corte, en tanto que las frecuencias inferiores a aquella sufren una atenuación inferior a los 3 dB, o lo que es lo mismo, inferior al 70,7%.

Es por lo que se le conoce como filtro pasa-bajo.

Como ejercicio de aplicación, hallar la frecuencia de corte para un filtro de este tipo cuando R = 10K y C = 0,1 μF.

La solución debe ser de 159,15 Hz.

Otro **filtro pasa-bajo** elemental, es el constituido por una bobina y un condensador (se ha sustituido la resistencia por una bobina L). Figura 6.34.

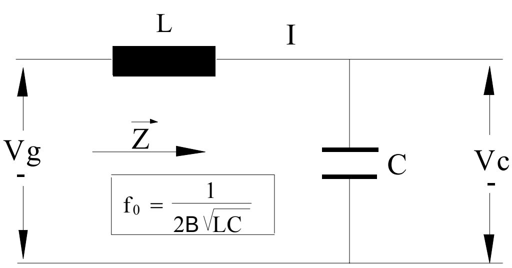


Figura 6.34. Filtro pasa-bajo L-C

En él existirá una frecuencia f_0 tal que la reactancia de la bobina (reactancia inductiva) sea igual que la reactancia del condensador (reactancia capacitiva). Es la frecuencia de resonancia o frecuencia de corte. Su valor viene dado por la formula:

$$\boxed{f_0 = 1/\ 2\ \pi\ \sqrt{LC}} \qquad [7]$$

Otro tipo de filtro pasa-bajo es el L-R representado en la figura 6.35. En él aparece escrita la fórmula de la frecuencia de corte.

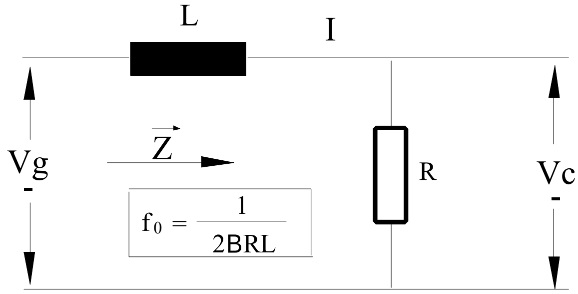


Figura 6.35. Filtro pasa-bajo L-R

33 Filtros pasa-alto.

Recuerda que un filtro pasa-alto es aquel que sólo deja pasar las corrientes cuyas frecuencias sean superiores a una frecuencia determinada llamada frecuencia de corte.
El circuito más sencillo es el de la figura 6.36.

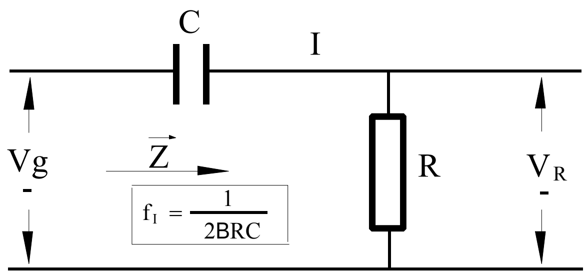


Figura 6.36. Filtro pasa-alto R-C

Observa el circuito: es el mismo que el R-C donde se han permutado la resistencia y el condensador.
La impedancia total, Z, que ofrece el circuito es:

$$Z = \sqrt{R^2 + Xc^2} = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\left(1/2\pi fC\right)^2}} \qquad [8]$$

Supongamos que Vg sea la señal senoidal de frecuencia f que se aplica al circuito y V_R la tensión de la señal obtenida a la salida; esto es en bornes de la resistencia.

Tendremos que: $\mathbf{V_R = I \cdot R}$

$$\mathbf{Vg = I \cdot Z = I \cdot \sqrt{R^2 + X_C^2}}$$

Dividiendo ambas expresiones, queda:

$$\frac{V_R}{Vg}=\frac{R}{R^2+X^2}=\frac{1}{\sqrt{1+\left(2\pi f_i RC\right)^2}} \qquad [9]$$

Es decir, que para unos valores fijos de R, C y Vg, variando el valor de la frecuencia de Vg podemos ir obteniendo los distintos valores de la tensión de salida V_R. Dicha tensión varía en la forma que aparece en la figura 6.37.

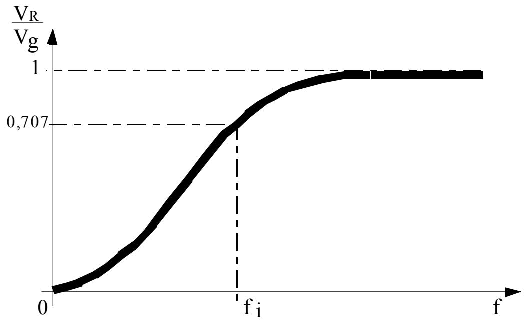


Figura 6.37. Respuesta en frecuencia

<u>FRECUENCIA DE CORTE:</u>

La frecuencia de corte es aquella para la cual la reactancia capacitiva es igual a la resistencia. Se define como frecuencia de corte (inferior en este caso) fi como aquella frecuencia para la cual la tensión de salida V_R es el 0,707 (70,7%) de la tensión de entrada V**g**; o sea:

$$\mathbf{V_R / Vg = 1/ \sqrt{2} = 0{,}707}$$

De esta fórmula y de la [9], se deduce que:

$$\boxed{\mathbf{fi = 1/ 2\,\pi RC}} \qquad [10]$$

De la fórmula [10] tenemos que: 2π RC = 1/fi y que $(2\pi \text{ RC})^2 = 1/ \text{fi}^2$

Si sustituimos $(2\pi\text{RC})^2 = 1/ \text{fi}^2$ en la expresión [9] tenemos que:

$$\boxed{\mathbf{V_R / Vg = 1/ \sqrt{1+ (fi / f)^2}}} \qquad [11]$$

que es la expresión matemática de la respuesta en frecuencia del **filtro pasa-alto**.

Para la frecuencia de corte f = fi y a medida que f disminuye la salida V_R se ve más atenuada. Al contrario, a medida que f va aumentando, la salida V_R va aumentando.

En consecuencia, este circuito atenúa las señales cuyas frecuencias sean inferiores a la de corte, en tanto que las frecuencias superiores a aquella sufren una atenuación inferior a los 3 dB, o lo que es lo mismo, inferior al 70,7%.

Es por lo que se le conoce como filtro pasa-alto.

Como ejercicio de aplicación, hallar la frecuencia de corte para un filtro de este tipo cuando R = 10 K y C = 0,1 µF. *La solución debe ser de 159,15 Hz.*

Otro tipo de **filtro pasa-alto** elemental es el constituido por una bobina y un condensador (se ha sustituido la resistencia por una bobina L). Figura 6.38.

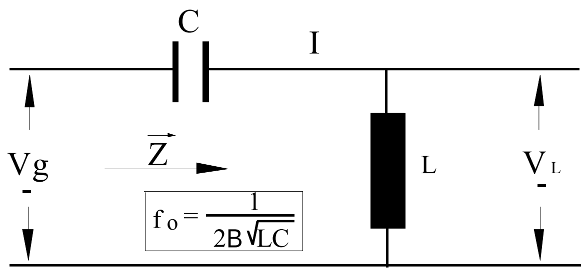


Figura 6.38. Filtro pasa-alto L-C

En él existirá una frecuencia f_0 tal que las reactancias de la bobina y del condensador sean iguales. Es la frecuencia de resonancia o frecuencia de corte.

Su valor viene dado por la formula:

$$\boxed{\mathbf{f_0 \;=\; 1/ 2\pi\sqrt{LC}}} \qquad [12]$$

Otro tipo de filtro pasa-alto es el R-L representado en la figura 6.39.

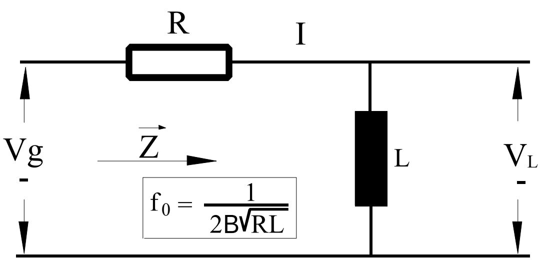


Figura 6.39. Filtro pasa-alto R-L

34 Filtros pasa-banda.

Ya vimos en la introducción que estos filtros son los que dejan pasar una banda determinada de frecuencias rechazando las demás.
Un tipo elemental de estos filtros puede ser el representado en la figura 6.40.

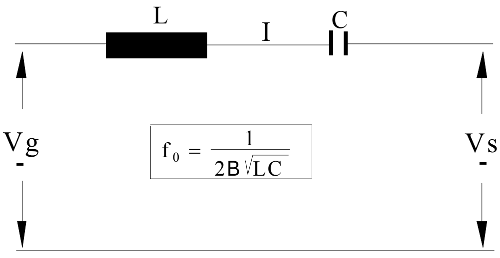


Figura 6.40. Filtro pasa-banda

Consta de un circuito L-C (o mejor R-L-C, siendo R la resistencia óhmica de la bobina) de tal forma que su frecuencia de resonancia coincida con la frecuencia central de la banda que se pretende dejar pasar a su través. No queda más que determinar el Q de la bobina para que el ancho de la banda pasante coincida con las frecuencias límites de la banda de paso.

Veamos esto mediante un ejemplo.
Sea que pretendemos diseñar un filtro que deje pasar las frecuencias comprendidas entre los 1.000 y 3.000 Hertzios.
El ancho de banda es $\Delta f = 3.000 - 1.000 = 2.000$ Hz.

La frecuencia central de la banda pasante es
$f_0 = 1.000 + (3.000 - 1.000)/2 = 2.000$ Hertzios.

La frecuencia de resonancia del filtro es:

$$f_0 = 1/ 2\pi \sqrt{LC} = 2.000 \text{ Hertzios}$$

Si tomamos, por ejemplo, un condensador de 10 KpF, hallamos L.

$$L = 633 \text{ mH.}$$

Hallamos el Q de la bobina para el ancho de banda de los 2.000 Hertzios.

$$Q = f_0 / \Delta f = 2.000 / 2.000 = 1$$

El factor de calidad determina la resistencia de la bobina, que en este caso debe ser igual que la reactancia inductiva a la frecuencia de los 2.000 Hz. Por tanto, la impedancia del circuito a esa frecuencia es

$R = X_L = 2 \cdot 2.000 \cdot 0{,}633 = 7.950\ \Omega$.

Otro tipo de filtro pasa-banda podría ser el de la figura 6.41.

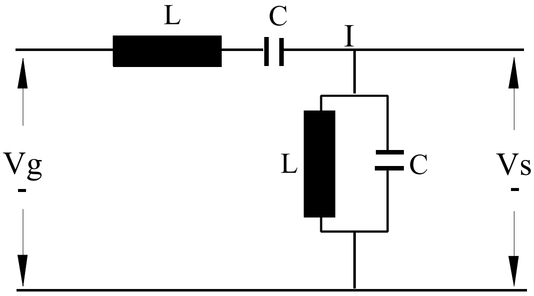


Figura 6.41. Filtro pasa-banda

Con este filtro se podrían derivar las frecuencias menores de los 1.000 Hertzios a través de la bobina y las superiores a los 3.000 Hertzios a través del condensador.

Siguiendo con el ejemplo anterior, se calculan las impedancias del circuito serie para las frecuencias de corte. Estas impedancias son:

$$Z_{1.000\text{Hz}} = Z_{3.000\text{Hz}} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = 14.696\ \Omega$$

Si tomamos la reactancia de la bobina del paralelo menor que 14.696 Ω , las frecuencias menores de los 1.000 Hz se derivarán por ella. De igual modo si hacemos que la reactancia del condensador sea menor que los 14.696 Ω, por él se derivarán fácilmente las frecuencias superiores a los 3.000 Hz.
Tomemos ambas reactancias 20 veces menor. Es decir, 14.696/2 = 735 Ω

Ahora calculemos la L y la capacidad del paralelo.
Para 1.000 Hz, $L = X_L/2\pi f = 735/ 2 \pi 1.000 = 117$ mH.
Para 3.000 Hz $C = 1/2 \pi X_C f = 1/ 2 \pi 735\ 3.000 = 72$ KpF.

Nota: *con este filtro se eliminan fácilmente todas las frecuencias distintas de la banda comprendida entre los 1.000 y los 3.000 Hertzios, con lo que es mejor que el anterior.*

35 Filtros elimina-banda.

Estos filtros tienen la facultar de eliminar una banda determinada de frecuencias permitiendo el paso de las demás. Un filtro elemental de este tipo es el representado en la figura 6.42.

En este caso, por el circuito se derivarán las frecuencias correspondientes a la banda de paso del circuito. Si consideramos el ejemplo anterior, este filtro dejará pasar todas las frecuencias excepto las comprendidas entre los 1.000 y los 3.000 Hertzios.

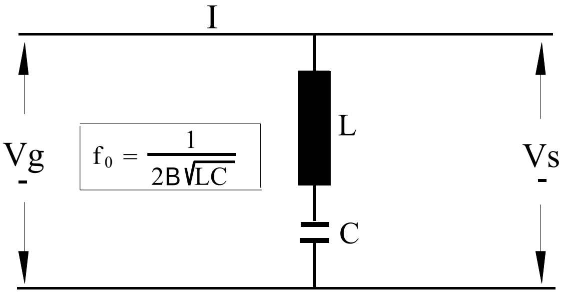


Figura 6.42. Filtro elimina-banda

Una versión nueva y mejorada puede ser la de la figura 6.43. El circuito paralelo dejará pasar todas las frecuencias: por la bobina pasarán las bajas y por el condensador las altas. Una vez atravesado el paralelo, la serie L-C derivará la banda correspondiente a la frecuencia de resonancia propia del circuito.

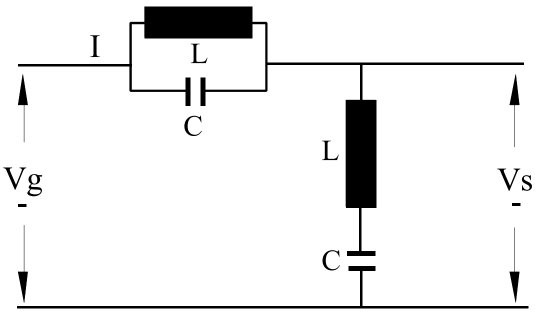


Figura 6.43. Filtro elimina-banda

Para el ejemplo anterior, este filtro permitirá el paso de todas las frecuencias excepto las comprendidas entre los 1.000 y los 3.000 Hertzios.

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1.- Halla la frecuencia de corte para un filtro pasa-bajo para R = 1K Ω y C = 300 pF.

Solución: 530.516 Hz.

2.- ¿Cuánto debe valer el condensador de un filtro pasa-bajo para que con una R =2K2 Ω, la fs sea de 1.540 Hz?. Si a este filtro se le aplican 15 voltios, ¿cuánto vale la tensión de salida, Vc, para una frecuencia de 2.000 Hz?. ¿Y para una frecuencia de 500 Hz?.

Solución: C = 47KpF; Vc = 9,15V y Vc = 14,26V.

3.- Halla la frecuencia de corte para un filtro pasa-alto para R = 1K y C = 300 pF.

Solución: 530.516 Hz.

4.- ¿Cuánto debe valer C de un filtro pasa-alto para que con una R = 2K2 Ω, la fi sea de 1.540 Hz?. Si a este filtro se le aplican 15 Voltios, ¿cuánto vale la tensión de salida, V_R, para una frecuencia de 2.000 Hz?. ¿Y para una frecuencia de 500 Hz?.

Solución: C = 47KpF; V_R = 11,27V y V_R = 7,42V.

EJERCICIOS PROPUESTOS

5.- Halla los posibles valores de R y C para que, mediante un filtro pasa-bajo, la frecuencia de corte sea de 12.000 Hz.

6.- Halla los posibles valores de R y C para que, mediante un filtro pasa-alto, la frecuencia de corte sea de 1.000 Hz.

7.- Diseña y calcula un filtro elemental pasa-banda (puede servirte la figura 6.40) que permita solamente el paso de las frecuencias comprendidas entre los 10.000 y los 12.000 Hz.

8.- Diseña y calcula un filtro elemental elimina-banda (puede servirte la figura 6.42) que permita sólo el paso de las frecuencias comprendidas entre los 8.000 y los 10.000 Hz.